

Л. А. Латотин Б. Д. Чеботаревский

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие для 7 класса
учреждений общего среднего образования
с русским языком обучения

*Допущено
Министерством образования
Республики Беларусь*

4-е издание, исправленное и дополненное

Минск «Народная асвета» 2014

Правообладатель Народная асвета

УДК 51(075.3=161.1)

ББК 22.1я721

Л27

Перевод с белорусского языка *Д. А. Карпикова*

Рецензент

доктор физико-математических наук, профессор,
главный научный сотрудник государственного
научного учреждения «Институт математики»
Национальной академии наук Беларуси
В. И. Берник

Латотин, Л. А.

Л27 Математика : учеб. пособие для 7-го кл. учреждений
общ. сред. образования с рус. яз. обучения / Л. А. Ла-
тотин, Б. Д. Чеботаревский ; пер. с белорус. яз. Д. А. Кар-
пикова. — 4-е изд., испр. и доп. — Минск : Нар. асвета,
2014. — 367 с. : ил.

ISBN 978-985-03-2151-0.

Предыдущее издание вышло в 2009 году.

УДК 51(075.3=161.1)

ББК 22.1я721

ISBN 978-985-03-2151-0

- © Латотин Л. А., Чеботаревский Б. Д.,
2004
- © Латотин Л. А., Чеботаревский Б. Д.,
2014, с изменениями
- © Карпиков Д. А., перевод на русский
язык, 2014
- © Оформление. УП «Народная асвета»,
2014

Дорогие друзья!

Математика, которую вы будете изучать в VII классе, отличается от математики V и VI классов. Ранее основное внимание было направлено на расширение «мира чисел». В V классе вы завершили изучение натуральных чисел и начали изучать обыкновенные дроби и действия над ними. Вам стали известны все положительные рациональные числа. Изучение математики в VI классе началось со знакомства с десятичными дробями, которыми можно представлять рациональные числа. Десятичные дроби наиболее удобны для практических вычислений, особенно теперь, когда есть возможность пользоваться калькулятором. В VI классе появились новые числа — отрицательные, которые вместе с изученными ранее числами составили множество всех рациональных чисел. В VII классе вы не будете знакомиться с новыми числами, это вас ожидает в VIII классе.

Изучение чисел и действий над ними составляет содержание *арифметики*. В VII классе вместо конкретных чисел вы будете рассматривать переменные. Из чисел и переменных образуются выражения и формулы. Изучение выражений и действий над ними составляет основное содержание *алгебры*, которая вместе с арифметикой и *геометрией* принадлежит к древнейшим ветвям математики. Выделение алгебры в отдельный раздел связано с деятельностью математика и астронома IX века Абу Абдаллы Мухаммеда бен Мусы аль-Маджуси аль-Хорезми и ученого-энциклопедиста X—XI веков Абу Рейхана Мухаммеда ибн Ахмеда аль-Беруни. Дальнейшее развитие алгебры связано с деятельностью математика XVI века Франсуа Виета и философа

и математика XVII века Рене Декарта. Основная проблема алгебры XVI—XVIII веков — решение уравнений разных видов. Вы научитесь решать наиболее простые, линейные уравнения. Отметим, что Виет знал общие приемы решения уравнений второй, третьей и четвертой степеней.

Каждый раздел учебного пособия разбит на отдельные параграфы, в которых буквами А), Б) и т. д. выделены смысловые блоки. Как и в предыдущих классах, каждый параграф начинается с обсуждения вопроса, обозначенного его названием. Наиболее важное в параграфе выделено специальными шрифтами. Новые понятия выделяются **жирным шрифтом**. Правила, утверждения выделены *жирным курсивом*, а понятия и факты, на которые нужно обратить внимание, но необязательные для запоминания, — *курсивом*. Материал, обозначенный треугольниками ▲, не предназначен для обязательного контроля.

После объяснительного текста идут контрольные вопросы, отмеченные знаком . Они предназначены для проверки того, как вы разобрались в содержании объяснительного текста. Если на тот или иной вопрос вы не смогли ответить, нужно вернуться к объяснительному тексту и с его помощью попробовать ответить на этот вопрос снова.

Упражнения, идущие после контрольных вопросов, разделены на три группы.

Упражнения в первой группе посвящены тем вопросам, которые обсуждались в объяснительном тексте. Они имеют преимущественно тренировочный характер, хотя могут быть и более сложными.

Во второй группе после разделительной черты задания самые разнообразные. При их выполнении вам придется применять знания, полученные ранее.

Задачи третьей группы, расположенные после разделительных звездочек, потребуют нестандартных рассуждений. И в то же время для их решения достаточно полученных вами знаний.

Если в формулировке использованы понятия стоимости, цены, то их нужно рассматривать как условные и относиться к ним, как к математическим величинам.

В конце учебного пособия приведены ответы на те упражнения, при выполнении которых вы можете испытывать определенные затруднения. Это в некоторой степени поможет проконтролировать правильность вашего решения.

Желаем успехов!

Авторы



Начальные понятия геометрии

1. Геометрические фигуры

А) Вокруг нас находятся различные тела. Они имеют разнообразные свойства. Строителя интересует, какие материалы использованы при строительстве дома, архитектора — его оформление, покупателя — стоимость дома. Геометра же интересуют форма предмета и его размеры. Кирпич, книга, коробка из-под овсяных хлопьев имеют форму прямоугольного параллелепипеда; мяч, клубок ниток, мыльный пузырь — форму шара; соломинка, карандаш — форму цилиндра. Если внимание обращается только на форму предмета и его размеры, то говорят о *геометрическом теле*. Понятно, что в природе мы не встречаем тел без цвета, массы. Поэтому говорят, что понятие тела является *математической абстракцией*, определенной *идеализацией*.

Каждое геометрическое тело имеет три измерения, которые условно называют *длиной*, *шириной*, *высотой*. Поэтому пространство, в котором мы живем, называют *трехмерным*. Легко указать измерения у прямоугольного параллелепипеда (рис. 1). А какие измерения, например, у ложки? Под ними часто понимают измерения наименьшего из прямоугольных параллелепипедов, в котором целиком помещается такое тело (рис. 2).

Каждое геометрическое тело имеет *поверхность*, которая является оболочкой, границей тела. По по-

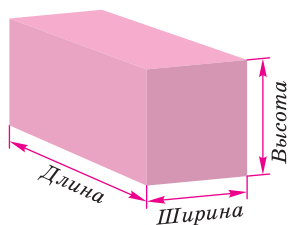


Рис. 1

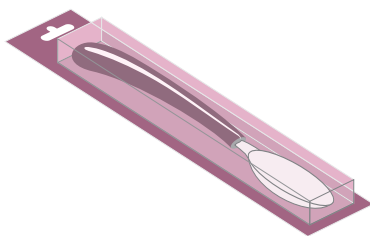


Рис. 2

верхности тела мы определяем его форму и цвет. Поверхность можно представить себе в виде очень тонкой пленки, толщину которой можно не брать в расчет. В жизни некоторые предметы мы считаем поверхностями. Например, пользуясь словосочетаниями «простыня 1 м 40 см на 2 м 10 см», «фотография 9 см на 12 см», мы подчеркиваем, что третье измерение в этих случаях несущественно.

Поверхностью геометрического тела, изображенного на рисунке 3, пространство делится на две части — внутреннюю и внешнюю. Чтобы попасть из любой внутренней точки A во внешнюю B , придется пересечь поверхность тела.

Некоторые поверхности имеют специальные названия. Поверхность шара называется *сферой* (рис. 4). Важной поверхностью является *плоскость*, которая бесконечна во всех направлениях.

В жизни мы встречаемся с объектами, которые считаем *линиями*. Это волос, нить, проволока, дорога, государственная граница. У всех таких объектов одно измерение значительно превосходит два осталь-

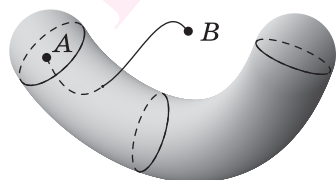


Рис. 3

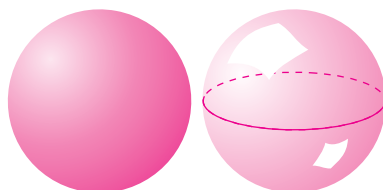


Рис. 4

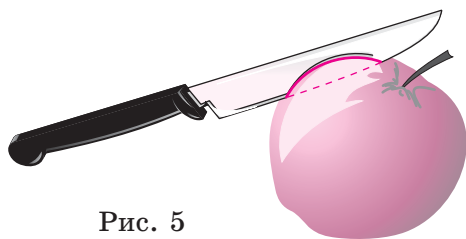


Рис. 5

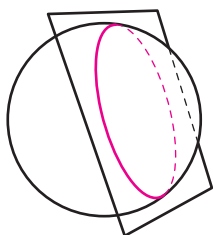


Рис. 6

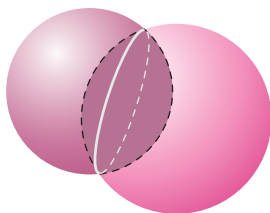


Рис. 7

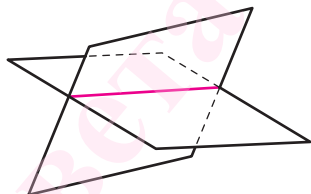


Рис. 8

ных. Это мы подчеркиваем, когда говорим «длина волоса 3 см», «путь от Могилева до Минска составляет 199 км», «государственная граница Беларуси составляет 3098 км».

Линия является границей поверхности, если такая граница есть. Линия образуется при пересечении двух поверхностей (рис. 5). При пересечении сферы с плоскостью образуется окружность (рис. 6). Окружность является пересечением и двух сфер (рис. 7). При пересечении двух плоскостей образуется прямая (рис. 8).

Иной раз нас не интересует ни длина, ни ширина, ни высота предмета, а только его месторасположение. В этом случае тело рассматривается как точка. Точкой является прокол иголкой в листе бумаги, город на географической карте, звезда на небе.

Точка образуется при пересечении двух линий (рис. 9), линии с поверхностью (рис. 10).

Точка, линия, поверхность — также идеализации. Считается, что линия, поверхность, тело состо-

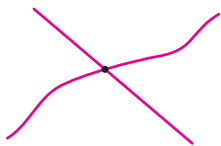


Рис. 9

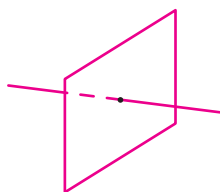


Рис. 10

ят из точек. Любое множество точек будем называть *геометрической фигурой*. Геометрические фигуры разделяют на плоские и пространственные. Фигура называется **плоской**, если все ее точки принадлежат одной плоскости. В противном случае фигура называется **пространственной**. На рисунках 11, 12, 13 изображены плоские фигуры, а на рисунках 14, 15, 16 — пространственные.

Б) Две геометрические фигуры считаются **равными**, если они совмещаются при наложении. Для обозначения равенства фигур будем использовать знак $=$.

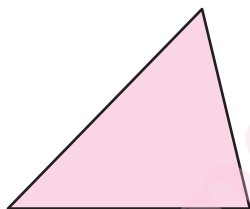


Рис. 11



Рис. 12

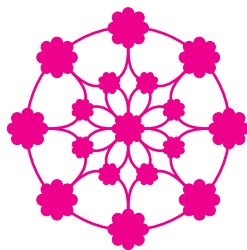


Рис. 13

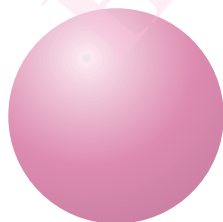


Рис. 14

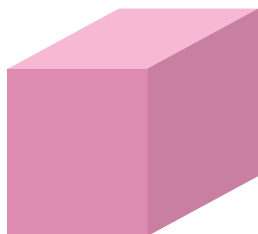


Рис. 15

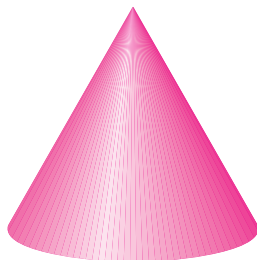


Рис. 16



Рис. 17

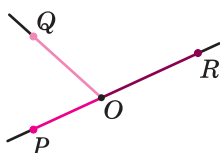


Рис. 18



Рис. 19

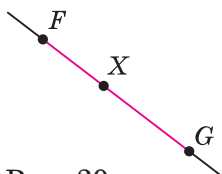


Рис. 20



Рис. 21

Каждая точка прямой разделяет ее на две *полупрямые*. Каждую из этих полупрямых вместе с граничной точкой называют *лучом* (рис. 17). Лучи на рисунке 17 имеют общее начало — точку A и противоположные направления. Такие лучи называют *дополнительными*. Чтобы задать луч, достаточно указать начало луча и еще какую-либо его точку, причем первым указывается начало. На рисунке 18 показаны три луча с началом O — OP , OQ , OR .

На рисунке 19 точка Q *лежит между* точками M и N дополнительных лучей.

Отрезком FG называют фигуру, состоящую из точек F и G и всех точек X , лежащих между F и G (рис. 20). Луч и отрезок — части прямой.

Каждая прямая l плоскости разделяет ее на две части — две *полуплоскости* (рис. 21). Полуплоскость образуют все точки, лежащие по одну сторону от прямой l , и точки самой прямой l . Прямую l считают *границей полуплоскости*. Точки A и B лежат по одну сторону от прямой l , если отрезок AB не пересекает прямую l . А если отрезок CD пересекает прямую l , то точки C и D лежат по разные стороны от l (рис. 22).

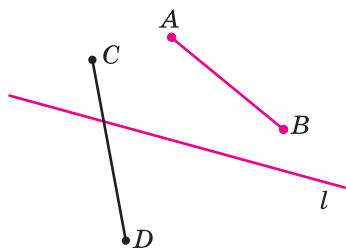


Рис. 22

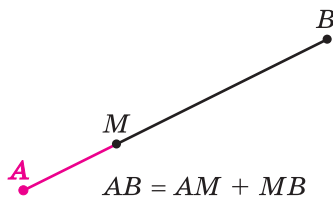


Рис. 23

В) Если выбрать *единицу длины*, то можно измерить *длину отрезка*.

Длина отрезка выражается положительным числом.

Равные отрезки имеют равные длины.

Если M — *внутренняя точка отрезка* AB , то *длина отрезка* AB *равна сумме длин отрезков* AM и MB (рис. 23).

Числовое выражение длины зависит от выбора единицы измерения (рис. 24). Вместе с тем отношение длин отрезков не зависит от выбора единицы измерения. Поэтому можно говорить об *отношении отрезков*. Например, утверждение

$$\frac{AB}{MN} = \frac{7}{4}$$

означает, что если первый отрезок поделить на 7 долей, то второй отрезок состоит из 4 таких долей (рис. 25).

Отрезок с концами в точках A и B , как и длину этого отрезка, обозначают AB .

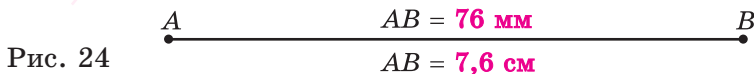


Рис. 24



Рис. 25

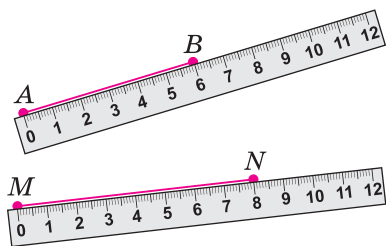


Рис. 26

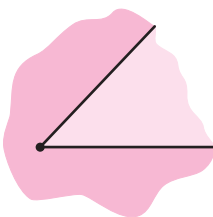


Рис. 27

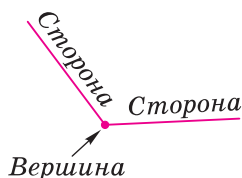


Рис. 28

Рис. 29



С помощью измерения можно установить, что два отрезка равны или что один из них меньше другого (рис. 26).

Г) Два луча с общим началом разделяют плоскость на две части (рис. 27). Каждую из этих частей вместе с лучами называют *углом*, сами лучи — *сторонами* угла, а их общее начало — *вершиной* угла (рис. 28). Угол с вершиной в точке *C* и сторонами *CB* и *CD* можно обозначить $\angle BCD$, или короче — $\angle C$.

Угол, стороны которого являются дополнительными лучами, называют *развернутым* (рис. 29).

За единицу измерения *величины* угла принимается *градус*. *Градус* есть стовосьмидесятая доля развернутого угла (рис. 30).

Величина угла выражается положительным числом.

Равные углы имеют одинаковые градусные меры.

Если луч *ON* принадлежит внутренней части угла *МОР*, то градусная мера угла *МОР* равна сумме градусных мер углов *МОН* и *НОР* (рис. 31).

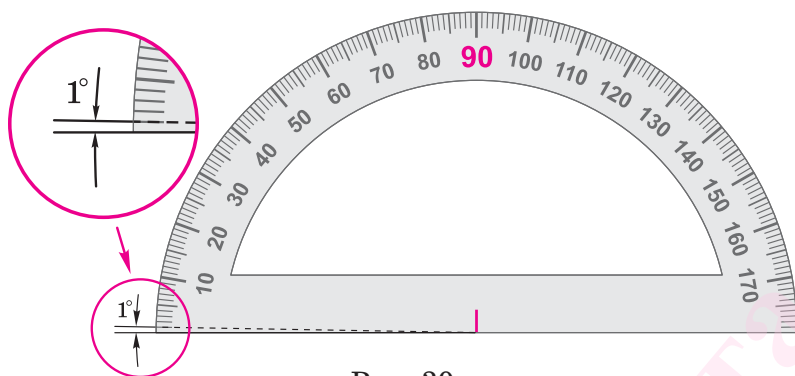
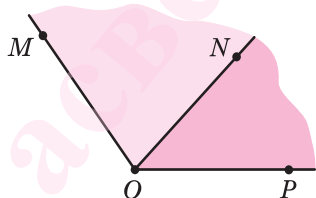


Рис. 30

Шестидесятую долю градуса называют *минутой*, шестидесятую долю минуты — *секундой*. Минуту обозначают знаком ', секунду — знаком ". Так, запись $\angle DBC = 134^\circ 17' 29''$ означает, что угол DBC равен 134 градусам 17 минутам 29 секундам.



$$\angle MOP = \angle MON + \angle NOP$$

Рис. 31

С помощью измерения можно установить, что два угла равны или что один из них меньше другого (рис. 32).

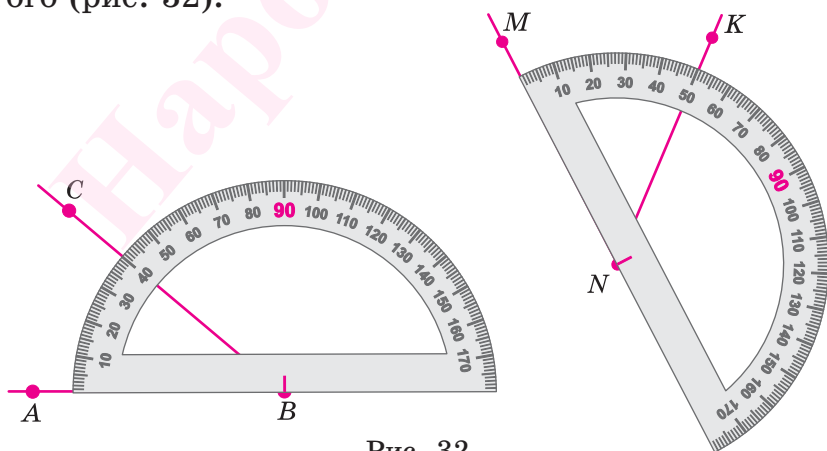


Рис. 32

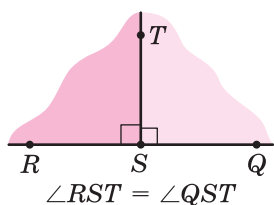


Рис. 33

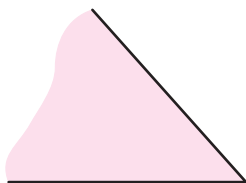


Рис. 34

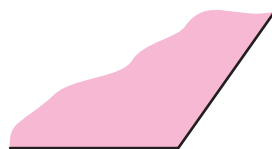


Рис. 35

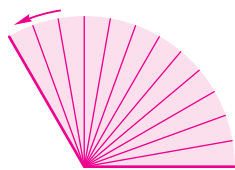


Рис. 36

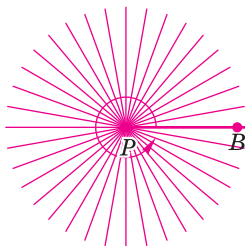


Рис. 37

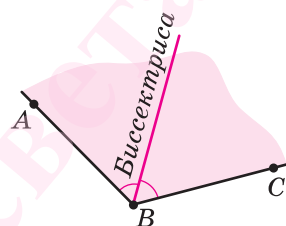


Рис. 38

Угол величиной 90° называют *прямым* (рис. 33).

Угол, который меньше прямого, называют *острым* (рис. 34).

Угол, который больше прямого и меньше развернутого, называют *тупым* (рис. 35).

Любой угол можно получить вращением луча вокруг его начала (рис. 36). Если луч PB повернуть так, чтобы он занял свое первоначальное положение, то будет описан **полный** угол (рис. 37).

Луч, который выходит из вершины угла и делит его пополам, называют *биссектрисой угла* (рис. 38).

Знак $\angle$ для обозначения угла введен французским математиком Пьером Эригоном в 1631 г. Знак $^\circ$ для обозначения градуса ввел в 1558 г. французский поэт и математик Жак Пелетье (1517—1582), знаки ' и " для обозначения минут и секунд встречаются уже у древнегреческого астронома, математика и географа Клавдия Птолемея (около 90 — около 160).



1. Сколько измерений имеет тело; поверхность; линия; точка?
2. Что называют геометрической фигурой?
3. Какая фигура называется плоской; пространственной?
4. Какие геометрические фигуры называют равными?
5. Что называют лучом? Чем он определяется?
6. Какие лучи называют дополнительными?
7. Что называют отрезком?
8. Сформулируйте свойства длины отрезка.
9. Что называют углом; вершиной угла; стороной угла?
10. Как обозначают угол?
11. Назовите единицы измерения величины угла. Укажите связи между ними.
12. Сформулируйте свойства величины угла.
13. Какой угол называют развернутым; прямым; острым; тупым; полным?
14. Какой луч называют биссектрисой угла?

1. Какое известное вам геометрическое тело наиболее соответствует предмету, изображенному на рисунке:

- а) 39; б) 40; в) 41; г) 42?

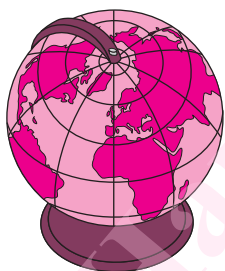


Рис. 39



Рис. 41

Рис. 40

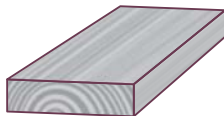


Рис. 42

2. Лист картона является телом. Назовите его измерения. Если на этом листе рисуют, то какие его измерения нас интересуют, а какие не интересуют? Какие измерения интересуют нас, когда пакуем стопку таких листов?

3. Чем — телом, поверхностью, линией, точкой — удобно считать:

а) школьный двор;	е) веревку;
б) школьную тетрадь;	ж) пол;
в) альбом для рисования;	з) острие иглки;
г) спицу для вязания;	и) яичную скорлупу;
д) лезвие ножа;	к) кожу человека?

4. Как вы объясните происхождение названий:

- а) населенный пункт;
- б) точка отправления;
- в) точка прибытия;
- г) троллейбусная линия;
- д) линия водораздела;
- е) береговая линия озера;
- ж) линия перемены дат;
- з) линия электропередач;
- и) земная поверхность;
- к) водная поверхность?

5. Отметьте в тетради четыре точки так, как показано на рисунке 43. Сколько эти точки определяют:

- а) отрезков; б) прямых; в) лучей?

Рис. 43 A B C D



6. Отметьте в тетради четыре точки так, как показано на рисунке 44. Сколько эти точки определяют:

- а) отрезков; б) прямых; в) лучей?

E F G



Рис. 44 H



Рис. 45

- а) отрезков;
б) прямых;
в) лучей?

8. На рисунке 46 изображены призма, пирамида, цилиндр, конус, шар. Скольким плоским поверхностям принадлежит точка:

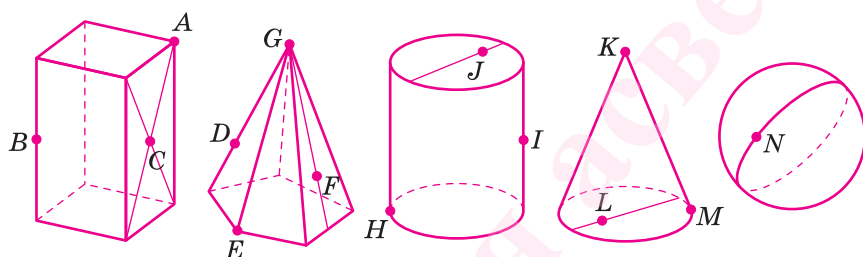


Рис. 46

- а) A ; г) D ; ж) G ; к) J ; н) M ;
б) B ; д) E ; з) H ; л) K ; о) N ?
в) C ; е) F ; и) I ; м) L ;

4; б) G ; в) C ; г) F ; д) O ; е) E ?

- a) A ; б) G ; в) C ; г) F ; д) O ; е) E ?

10. Измерьте отрезки, обозначенные на рисунке 47.

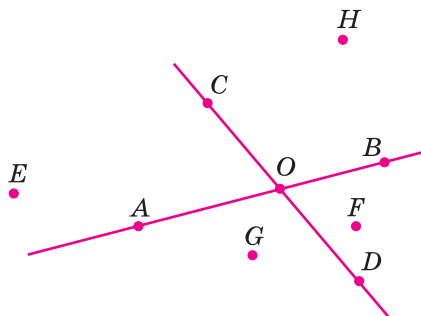


Рис. 47

11. На отрезке MN длиной 5 см выбраны точки A и B так, что $MA = 2,6$ см, а $NB = 1,3$ см. Найдите длину отрезка AB . Каким может быть ответ, если точки A и B выбирать на прямой MN ?

12. Используя рисунок 48, найдите отношение отрезка:

а) AB к отрезку BC ;	ж) AB к отрезку IH ;
б) AB к отрезку CD ;	з) AB к отрезку GH ;
в) AB к отрезку DF ;	и) BC к отрезку AB ;
г) AB к отрезку DI ;	к) FG к отрезку IH ;
д) AB к отрезку DE ;	л) ED к отрезку BC ;
е) AB к отрезку FG ;	м) FI к отрезку IH .

13. Как изменится отношение отрезка AB к отрезку BC , если рисунок 48 изменить в масштабе:

- а) $1 : 3$; б) $3 : 1$; в) $1 : 0,01$?

14. Найдите длину каждой ломаной (см. рис. 48), которая начинается в точке:

- а) A и заканчивается в точке E ;
 б) A и заканчивается в точке G ;
 в) A и заканчивается в точке H ;
 г) G и заканчивается в точке B ;
 д) G и заканчивается в точке I .

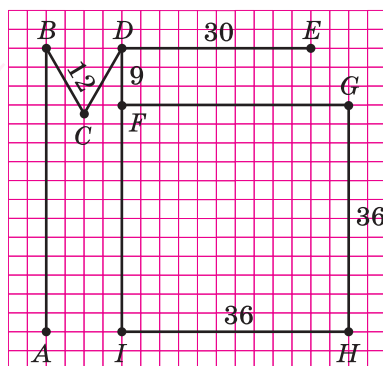


Рис. 48

15. Измерениями и вычислениями по рисунку 49 найдите величины всех углов с вершиной:

а) B ; б) E ; в) F .

16. По рисунку 49 запишите все:

- а) острые углы;
- б) прямые углы;
- в) тупые углы;
- г) развернутые углы.

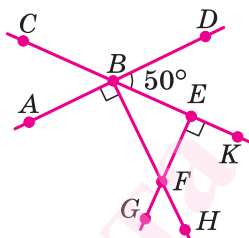


Рис. 49

17. Докажите, что величина:

- а) острого угла меньше 90° ;
- б) полного угла равна 360° .

18. Внутри угла ABC , величина которого равна 122° , проведен луч BP (рис. 50). Найдите величину угла ABP .

19. Вне угла MNP , величина которого равна 98° , проведен луч NA (рис. 51). Найдите величину угла MNA .

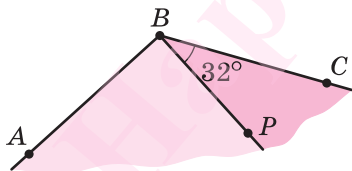


Рис. 50

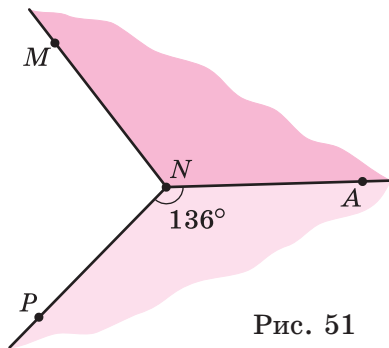


Рис. 51

20. Учитывая, что на рисунке 52 I — точка пересечения биссектрис треугольника SRT , найдите измерениями и вычислениями все его углы.

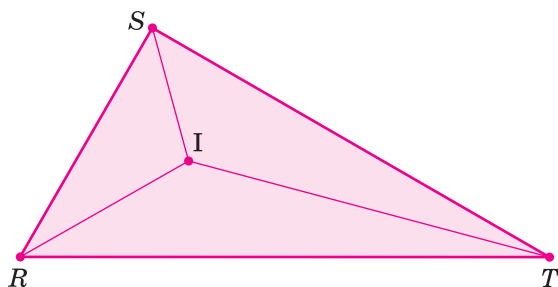


Рис. 52

21. Сделайте в тетради рисунок, похожий на рисунок 52, и затем постройте угол, равный углу:

- а) RST ; в) TRS ; д) SIR ; ж) SIT ;
 б) STR ; г) RSI ; е) IRS ; з) RIT .

22. Начертите луч. Используя только линейку, постройте на глаз угол, равный:

- а) 15° ; г) 60° ; ж) 105° ; к) 150° ;
 б) 30° ; д) 75° ; з) 120° ; л) 165° ;
 в) 45° ; е) 90° ; и) 135° ; м) 175° .

Найдите величину построенного вами угла с помощью транспортира. Определите, на сколько процентов результат вашего построения отличается от нужного результата.

23. Вычислите:

- а) $90^\circ 27' + 19^\circ 17'$; ж) $14^\circ 35' \cdot 2$;
 б) $56^\circ 39' + 19^\circ 21'$; з) $71^\circ 17' \cdot 10$;
 в) $111^\circ 58' + 18^\circ 2'$; и) $28^\circ 22' \cdot 5$;
 г) $137^\circ 8' + 13^\circ 48'$; к) $28' \cdot 6$;
 д) $14^\circ \cdot 2$; л) $9'9'' \cdot 4$;
 е) $71^\circ 17' \cdot 3$; м) $23'19'' \cdot 7$.

24. Вычислите:

- а) $90^\circ - 19^\circ 27'$; в) $127^\circ - 82^\circ 58'$;
 б) $33^\circ - 11^\circ 11'$; г) $169^\circ - 134^\circ 8'$;

- д) $50^\circ - 28'34''$; и) $100^\circ - 20^\circ 20'50''$;
 е) $44^\circ - 34'34''$; к) $78^\circ - 35^\circ 20'55''$;
 ж) $50^\circ - 20'34''$; л) $176^\circ - 125^\circ 28'54''$;
 з) $115^\circ - 59^\circ 59'$; м) $101^\circ - 87^\circ 31'49''$.

25. Вычислите:

- а) $92^\circ : 4$; д) $14^\circ 17' : 2$; и) $28^\circ 22'55'' : 5$;
 б) $92^\circ : 5$; е) $73^\circ : 3$; к) $37^\circ 44'43'' : 2,5$;
 в) $111^\circ 57' : 3$; ж) $14'35'' : 5$; л) $19^\circ 32'3'' : \frac{1}{3}$;
 г) $137^\circ 8' : 4$; з) $71' 55'' : 10$; м) $74^\circ 48'18'' : \frac{3}{4}$.

26. Постройте угол и проведите его биссектрису, учитывая, что угол равен:

- а) 60° ; в) 90° ; д) 170° ;
 б) 86° ; г) 118° ; е) 180° .

27. Сделайте в тетради рисунок, похожий на рисунок 53, и затем постройте угол, равный углу с вершиной:

- а) D ; б) E ; в) F .

Проведите биссектрисы построенных углов.

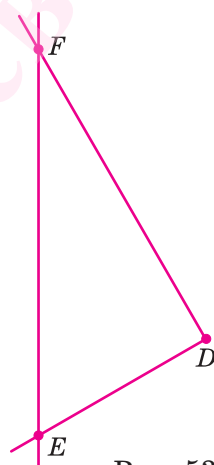


Рис. 53

28. Сравните числа:

- а) 237 и 256; д) 2,37 и 2,56; и) $2\frac{1}{3}$ и 2,332;
 б) 237 и -256; е) 2,37 и $2\frac{9}{25}$; к) -2,45 и $-2\frac{4}{9}$;
 в) -237 и 256; ж) $2\frac{3}{5}$ и $2\frac{12}{23}$; л) $2\frac{1}{7}$ и $-2\frac{4}{27}$;
 г) -237 и -256; з) $2\frac{2}{3}$ и $2\frac{17}{24}$; м) $-2\frac{1}{5}$ и $-2\frac{4}{15}$.

29. Сравните с нулем значение выражения:

- а) $256 - 259$; д) $\frac{7}{15} - \frac{14}{31}$; и) $-171 - 243$;
б) $25,6 - 2,59$; е) $\frac{3}{7} - \frac{5}{14}$; к) $-811 - (-923)$;
в) $0,256 - 0,0259$; ж) $\frac{3}{7} - \frac{1}{2}$; л) $-317 - (-212)$;
г) $0,256 - 0,256$; з) $\frac{3}{7} - \frac{5}{9}$; м) $544 - (-713)$.

30. Вычислите:

- а) $(-1)^{24}$; г) 3^{-4} ; ж) $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$; к) $\left(-\frac{5}{12}\right)^2$;
б) 1^{-7} ; д) $(-3)^{-4}$; з) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^{-3}$; л) $0,001^{-2}$;
в) 2^4 ; е) $\left(\frac{1}{11}\right)^{-3}$; и) $\left(-2\frac{4}{5}\right)^{-2}$; м) $0,25^{-2}$.

31. Число 5,32:

- а) увеличьте на 3,08; в) увеличьте в 4 раза;
б) уменьшите на 1,41; г) уменьшите в 4 раза.

32. В лесу происходит самопрореживание, т. е. число деревьев на единицу площади с течением времени уменьшается. Сколько сосновых деревьев приходится на 1 га столетнего леса, если сначала на 1 га было 10 тыс. деревьев, к сорокалетнему возрасту леса осталось только 25 % этого числа, а к столетнему — 21,2 % деревьев, оставшихся к сорокалетнему возрасту?

33. Если из числа жителей Жлобинского района вычесть 20 % его, затем 25 % остатка и еще $14\frac{2}{7}$ % следующего остатка, то в результате получится 18 тыс. жителей. Сколько человек живет в Жлобинском районе?

34. Ола и Гайна — притоки Березины. Если к длине Березины прибавить длину Олы, то получится 713 км, а если из длины Березины вычесть длину

Гайны, то получится 513 км. Найдите длины Березины, Олы и Гайны, учитывая, что длины притоков одинаковы.

35. Сумма двух чисел равна 10. Если первое число увеличить втрое, то сумма станет равной $19\frac{1}{3}$. Какие это числа?

* * *

36. Для нумерации страниц в книге понадобилось всего 5293 цифры. Сколько страниц в этой книге?

37. Из спичек составлено 5 квадратов (рис. 54). Нужно переложить 3 спички так, чтобы получилось 4 квадрата.

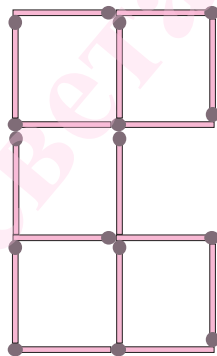


Рис. 54

38. Свое лучшее произведение — поэму «Песня о зубре» — Микола Гусовский создал в году, о котором известно следующее: количество прошедших столетий есть произведение двух нечетных простых чисел, а количество лет от начала столетия на 7 больше количества прошедших столетий. В каком году Гусовский создал «Песню о зубре»?

2. Углы между прямыми

А) Отметим на плоскости две точки A и B и проведем через них прямую (рис. 55). Другую прямую через эти точки провести нельзя. Этот факт формулируют как *основное свойство прямой*:



Рис. 55



Рис. 56

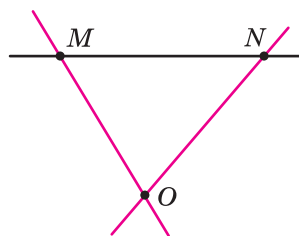


Рис. 57

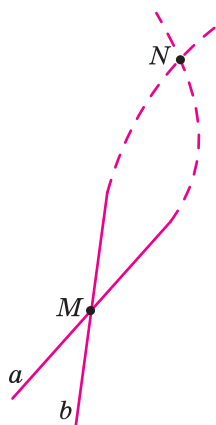


Рис. 58

через две различные точки плоскости можно провести прямую, и только одну (рис. 56).

Прямую, проходящую через точки A и B , обозначают AB . Прямые на рисунке 57 можно назвать MN , OM , ON .

Используя основное свойство прямой, можно обосновать такое утверждение.

Теорема 1. Если две различные прямые имеют общую точку, то эта точка единственная.

Доказательство. Пусть M — общая точка прямых a и b (рис. 58). Допустим, что эти прямые имеют еще одну общую точку — точку N . Получается, что через точки M и N проходят прямая a и отличная от нее прямая b , т. е. две различные прямые. Но это противоречит основному свойству прямой. Поэтому допущение о наличии у прямых a и b другой общей точки нужно отклонить. Значит, M является единственной общей точкой прямых a и b .

Б) Теоремами в математике называют утверждения, истинность которых устанавливается с помощью рассуждений, *доказательств*.



Рис. 59

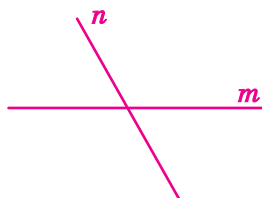


Рис. 60



Рис. 61

Так, в теореме 1 доказано, что две различные прямые или не имеют общих точек (рис. 59), или имеют единственную общую точку (рис. 60). Прямые, которые имеют единственную общую точку, называют **пересекающимися**. Прямые на плоскости, не имеющие общих точек, называют **параллельными**. Если известно, что прямые имеют не менее двух общих точек, то это **совпадающие** прямые (рис. 61).

В) На рисунке 62 показаны две пересекающиеся прямые k и l . Они разделили плоскость на четыре части (рис. 63), каждая из которых вместе с соответствующими лучами является углом. При этом углы, у которых есть общая сторона, а две другие стороны составляют прямую, называют **смежными**.

На рисунке 64 угол ABC смежный с углом CBD , а угол DBC смежный с углом CBA .

При пересечении двух прямых образуются четыре пары смежных углов.

Сумма градусных мер смежных углов равна 180° :

$$\angle ABC + \angle CBD = 180^\circ.$$

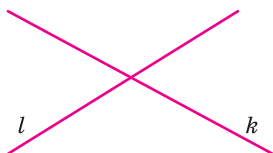


Рис. 62

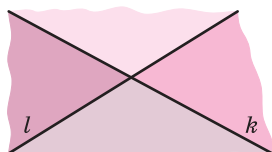


Рис. 63

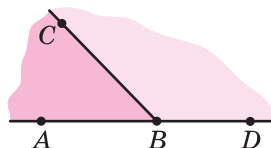


Рис. 64

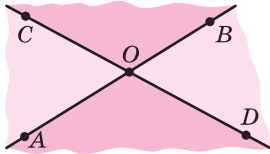


Рис. 65

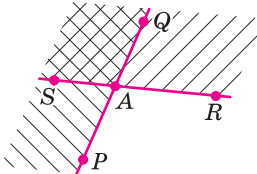


Рис. 66

Углы, у которых стороны одного являются дополнительными лучами к сторонам другого, называют **вертикальными**.

На рисунке 65 угол AOC вертикален углу BOD , а угол COB вертикален углу AOD .

Теорема 2. Вертикальные углы равны.

Доказательство. Пусть углы PAS и RAQ являются вертикальными (рис. 66). Поскольку угол PAQ является развернутым, то $\angle PAS = 180^\circ - \angle SAQ$.

Поскольку угол RAS — также развернутый, то $\angle RAQ = 180^\circ - \angle SAQ$.

Из этих равенств видно, что

$$\angle PAS = \angle RAQ.$$

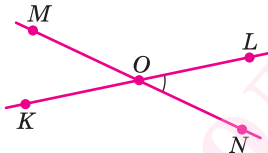


Рис. 67

Из двух пар вертикальных углов, возникающих при пересечении двух прямых, углы хотя бы одной пары не превышают 90° . Величину каждого из этих углов принимают за величину *угла между прямыми*. На рисунке 67 угол между прямыми KL и MN равен углу LON , или, что то же самое, углу KOM , и равен 37° .

Величина угла между прямыми находится в пределах от 0° до 90° .

Г) Пересекающиеся прямые называют **перпендикулярными**, если угол между ними равен 90° .

Перпендикулярность прямых показывают так, как на рисунке 68.

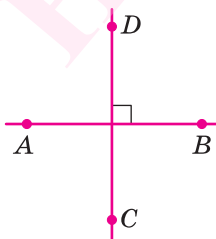


Рис. 68

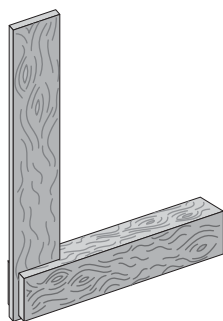


Рис. 69

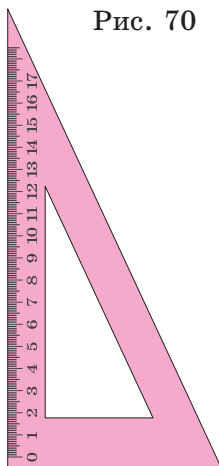


Рис. 70

Рис. 71

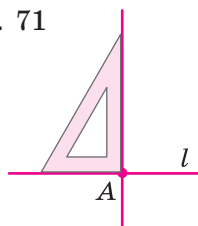
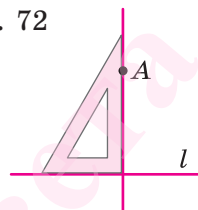


Рис. 72



То, что прямые AB и CD перпендикулярны, записывают так:

$$AB \perp CD.$$

Прямую, которая проходит через данную точку и перпендикулярна данной прямой, строят с помощью угольника (рис. 69) или чертежного треугольника (рис. 70). Рисунки 71 и 72 показывают, как это делать.

Теорема 3. *Через любую точку плоскости можно провести прямую, перпендикулярную данной, и только одну.*

Доказательство. Допустим, что это не так. Пусть прямые a и b , которые проходят через точку C , пересекают прямую l в точках A и B соответственно и образуют с ней прямые углы (рис. 73). Тогда в треугольнике ABC углы A и B будут прямыми. Сумма этих углов вместе с углом C даст величину, большую 180° . Но сумма внутренних углов треугольника не может быть больше 180° . Полученное

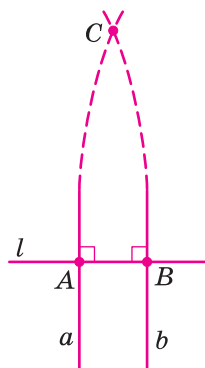


Рис. 73

противоречие вынуждает отклонить допущение и согласиться с тем, что прямые a и b , перпендикулярные данной прямой, не пересекаются.

Знак $\perp$ для обозначения отношения перпендикулярности прямых ввел в 1634 г. французский математик Пьер Эригон.

Д) Вы уже, наверное, обратили внимание на то, что в учебном пособии некоторые слова или словосочетания выделены **жирным шрифтом** или *курсивом*. Так в тексте отмечены понятия. *Понятие* вводится с помощью определения. **Дать определение** понятия означает разъяснить, что это понятие обозначает. Например, определение *Острым углом называется угол, который меньше прямого* нужно понимать так: словосочетание *Острый угол* обозначает то же самое, что и словосочетание *Угол, который меньше прямого*.

На вопрос *Какие прямые называют пересекающимися?* вы ответите таким предложением:

Пересекающимися прямыми называют прямые, имеющие единственную общую точку.

Это означает, что утверждение *Прямые являются пересекающимися* выражает то же самое, что и утверждение *Прямые имеют единственную общую точку*.

Свойства понятий или отношений между ними мы формулируем утверждениями. Эти утверждения в учебном пособии также выделены, но иначе — **жирным курсивом**. Истинность утверждения в математике обычно устанавливают с помощью рассуждения, которое называют **доказательством**. Доказанное утверждение называют **теоремой**.

В теореме выделяют две части: то, что дано, и то, что нужно доказать. Например, в теореме *Если две различные прямые имеют общую точку, то эта*

точка единственная дано утверждение *Две различные прямые имеют общую точку*, а утверждение *Точка пересечения двух различных прямых единственная* нужно доказать. То, что дано, называют **условием** теоремы, а то, что нужно доказать, — **заключением** теоремы. От условия к заключению мы переходим с помощью рассуждения.

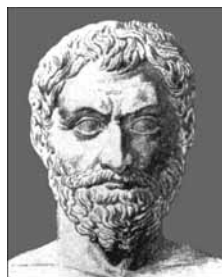


Рис. 74

Выделить условие и заключение несложно, если теорема сформулирована в форме *Если А, то В*. А если это не так, то перед выделением условия и заключения нужно попробовать перейти к такой формулировке теоремы. Например, теорему *Вертикальные углы равны* можно переформулировать так: *Если углы вертикальны, то эти углы равны*, и тогда становится понятным, что данным является утверждение *Углы являются вертикальными (углы А и В вертикальные)*, а доказать нужно утверждение *Углы являются равными ($\angle A = \angle B$)*.

Первые доказательства связывают с именем древнегреческого математика, астронома и философа Фалéса (625—547 до н. э.) (рис. 74).



1. Сформулируйте основное свойство прямой.
2. Как обозначают прямую?
3. Сколько общих точек могут иметь две прямые?
4. Какие прямые называют пересекающимися; параллельными?
5. Сформулируйте свойство смежных углов.
6. Сформулируйте свойство вертикальных углов.
7. Какой угол называют углом между прямыми?
8. Какие пересекающиеся прямые называются перпендикулярными?
9. Какое свойство имеют прямые, перпендикулярные одной прямой?

10. Что означает требование *дать определение*?
11. Какое утверждение называют теоремой?
12. Что называют условием теоремы; заключением теоремы?

39. На сколько частей разделяют плоскость две прямые при их различных возможных расположениях?

40. На плоскости проведены три прямые так, что каждая из них пересекает две другие в различных точках. Определите:

- а) на сколько частей разделилась плоскость;
- б) на какие части разделилась каждая прямая;
- в) сколько образовалось отрезков;
- г) сколько образовалось лучей;
- д) сколько образовалось лучей, каждый из которых не содержит другого луча в качестве своей части.

41. Угол ABC равен 46° , а угол CBD — 24° . Найдите угол ABD .

42. Используя рисунок 75, найдите углы, образованные при пересечении прямых AB и CD .

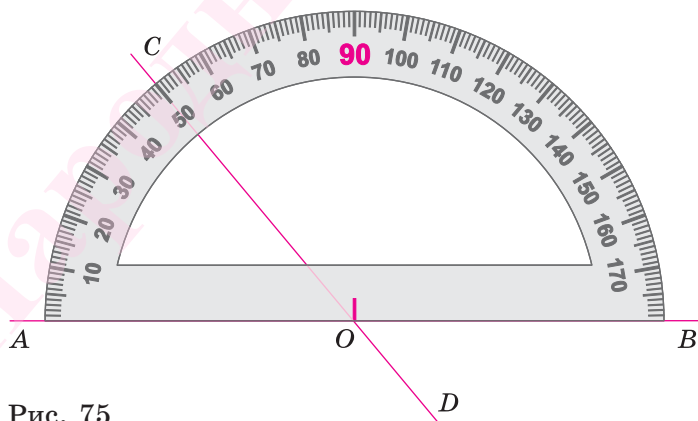


Рис. 75

43. Докажите, что если один из углов, возникших при пересечении двух прямых, равен 90° , то остальные углы также равны 90° .

44. Один из четырех углов, образованных при пересечении двух прямых, равен 95° . Чему равен угол между этими прямыми?

45. Какое наибольшее количество лучей с началом в данной точке можно провести на плоскости, чтобы все углы, сторонами которых они являются, были тупыми?

46. По рисунку 76 найдите углы:

- а) треугольника ABC ;
- б) треугольника ADE ;
- в) треугольника DBF ;
- г) треугольника CFE ;
- д) четырехугольника $ADFC$;
- е) четырехугольника $ABFE$.

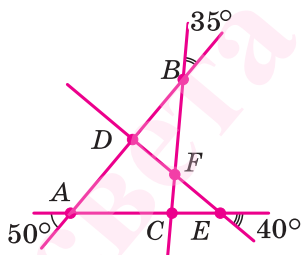


Рис. 76

47. Через вершину угла в 66° проведена прямая, перпендикулярная его биссектрисе. Найдите углы, которые образует эта прямая со сторонами угла.

48. Через вершину угла в 118° проведена прямая, перпендикулярная одной из его сторон. Найдите углы, которые образует эта прямая с биссектрисой угла.

49. Найдите угол, учитывая, что его биссектриса образует со стороной угол, равный:

- а) 20° ; б) 77° ; в) $20^\circ 32'$; г) $20^\circ 32' 11''$.

50. Найдите величину угла, смежного с углом ABC на рисунке:

- а) 77° ; б) 78° ; в) 79° .

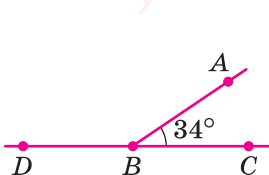


Рис. 77

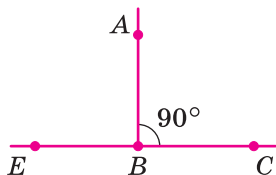


Рис. 78

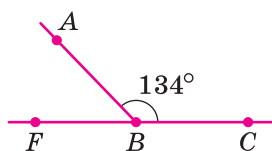


Рис. 79

51. Углы POR и QOR смежные. Найдите их величины, учитывая, что один из них на 28° больше другого.

52. Углы APB и CPB смежные. Найдите их величины, учитывая, что один из них на 19° меньше другого.

53. Найдите углы MAL и LAK , учитывая, что они смежные и один из них в пять раз больше другого.

54. Найдите углы BEN и CEN , учитывая, что они смежные и один из них в полтора раза меньше другого.

55. Определите, какой из двух углов больше и на сколько, учитывая, что сумма первого угла и угла, смежного со вторым, равна 215° .

56. Докажите, что биссектрисы:

а) одной пары вертикальных углов составляют прямую;

б) четырех углов, образованных при пересечении двух прямых, составляют пару перпендикулярных прямых.

57. Используя свойство смежных углов, найдите все углы по данным, приведенным на рисунке:

а) 80° ; в) 82° ; д) 84° ;

б) 81° ; г) 83° ; е) 85° .

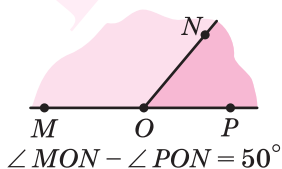


Рис. 80

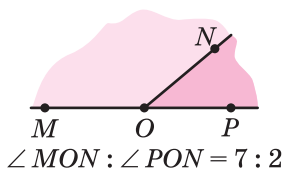


Рис. 81

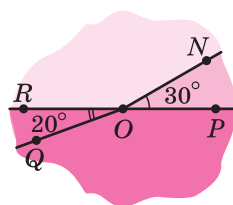


Рис. 82

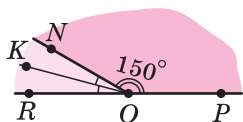


Рис. 83

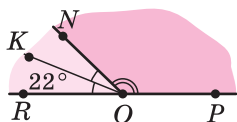


Рис. 84

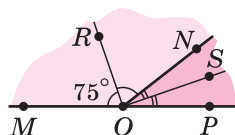


Рис. 85

58. Найдите все углы по данным, приведенным на рисунке:

- а) 86; в) 88; д) 90; ж) 92;
б) 87; г) 89; е) 91; з) 93.

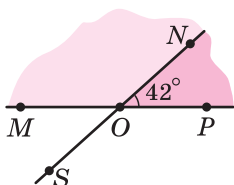
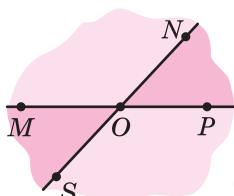


Рис. 86



$$\angle NOP + \angle POS + \angle SOM = 227^\circ$$

Рис. 87

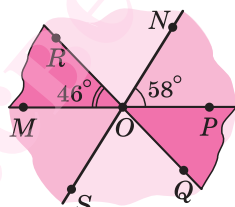


Рис. 88

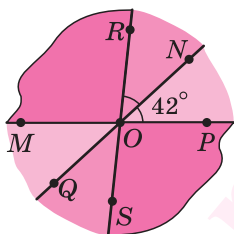
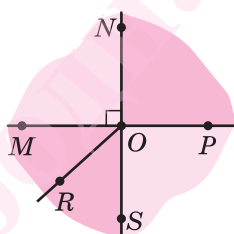


Рис. 89



$$\angle MOR : \angle SOR = 7 : 8$$

Рис. 90

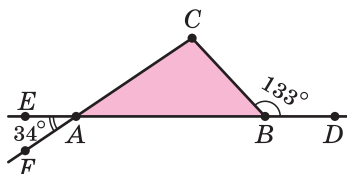
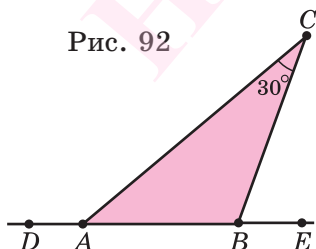


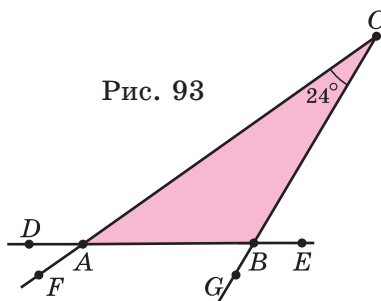
Рис. 91

Рис. 92



$$\angle CAD = 2 \angle CBE$$

Рис. 93



$$\angle FAD : \angle GBE = 5 : 8$$

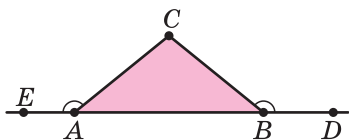


Рис. 94

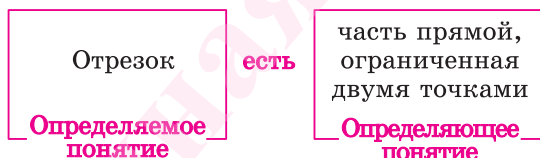
59. Докажите равенство углов $\angle CAB$ и $\angle CBA$, учитывая сведения, приведенные на рисунке 94.

60. У двух углов величин 20° и 50° общая только вершина. Найдите угол между их биссектрисами, учитывая, что стороны углов образуют угол в 60° .

61. Три угла, образованных при пересечении двух прямых, оказались равными друг другу. Докажите, что эти прямые перпендикулярны.

62. В определении *Отрезком называется часть прямой, ограниченная двумя точками* можно выделить две части: определяемое понятие *Отрезок* и определяющее понятие *Часть прямой, ограниченная двумя точками* (рис. 95).

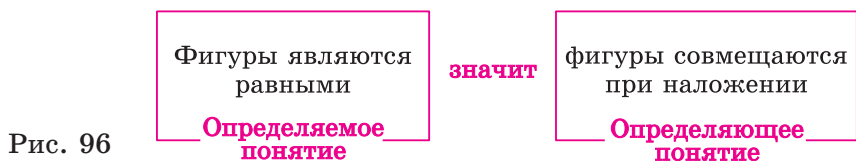
Рис. 95



Выделите определяемое понятие и определяющее понятие в определении:

- а) четным числом называется число, делящееся на 2;
- б) уравнением называют равенство с переменной;
- в) кубическим метром называют объем куба с ребром, равным 1 м;
- г) минутой называется шестидесятая доля градуса;
- д) угол, который больше прямого и меньше развернутого, называют тупым.

63. В определении *Две геометрические фигуры называют равными, если они совмещаются при наложении* определяемым является отношение *Фигуры*



являются равными, а определяющим — отношение *Фигуры совмещаются при наложении* (рис. 96).

Выделите определяемое понятие и определяющее понятие в определении:

- а) параллельными прямыми называют прямые одной плоскости, не имеющие общих точек;
- б) прямые называют перпендикулярными, если угол между ними равен 90° ;
- в) число a делится на число b , если остаток от деления числа a на число b равен нулю;
- г) решить уравнение означает найти его корни или доказать, что уравнение не имеет корней;
- д) запись $a > 0$ означает, что a является положительным числом;
- е) запись $a < 0$ означает, что a является отрицательным числом;
- ж) запись $a \geq 0$ означает, что a является положительным числом или нулем;
- з) запись $a \leq 0$ означает, что a является отрицательным числом или нулем.

64. Выделите условие и заключение в теореме:

- а) если число оканчивается четной цифрой, то оно делится на 2;
- б) если число делится на 2, то оно оканчивается четной цифрой;
- в) если число оканчивается нечетной цифрой, то оно не делится на 2;
- г) если число не делится на 2, то оно оканчивается нечетной цифрой.

65. Сформулируйте утверждение по данным условию и заключению.

Условие	Заключение
Углы являются смежными	Сумма углов равна 180°
Углы A, B, C — углы треугольника	Сумма углов A, B, C равна 180°
a, b, c — стороны треугольника	$a < b + c$
Число оканчивается цифрой 0	Число делится на 10
Число делится на 10	Число оканчивается цифрой 0
Сумма цифр числа делится на 3	Число делится на 3
Число не делится на 3	Сумма цифр числа не делится на 3
Углы A и B — углы при основании равнобедренного треугольника	Углы A и B равны

66. Определите, является ли теоремой утверждение:

- а) если число делится на 5, то оно оканчивается цифрой 0 или цифрой 5;
- б) если число оканчивается цифрой 0 или цифрой 5, то оно делится на 5;
- в) если число не делится на 5, то оно не оканчивается ни цифрой 0, ни цифрой 5;
- г) если число не оканчивается ни цифрой 0, ни цифрой 5, то оно не делится на 5;
- д) если углы являются вертикальными, то они равны друг другу;
- е) если углы равны друг другу, то они вертикальные;

ж) если углы не являются вертикальными, то они не равны друг другу;

з) если углы не равны друг другу, то они не являются вертикальными.

67. Через точку A , не лежащую ни на одной из двух пересекающихся прямых k и l , проведены прямые a и b , одна из которых перпендикулярна прямой k , другая — прямой l . Докажите, что прямые a и b не совпадают.

68. Сравните числа a и b , зная, что:

а) $a > 0$ и $b < 0$; д) $a < 0$, $b < 0$, $|a| < |b|$;

б) $a < 0$ и $b > 0$; е) $a < 0$, $b < 0$, $|a| > |b|$;

в) $a > 0$ и $b = 0$; ж) $a > 0$, $b > 0$, $|a| < |b|$;

г) $a < 0$ и $b = 0$; з) $a > 0$, $b > 0$, $|a| > |b|$.

69. Найдите число:

а) на 50 % меньше 2,8;

б) на 10 % больше 2,8;

в) 50 % которого составляют 2,8;

г) 10 % которого составляют 2,8.

70. Вычислите:

а) $6\frac{4}{7} : (-2)$; г) $\left(-6\frac{4}{7}\right) \cdot (-0,2)$;

б) $\left(-6\frac{4}{7}\right) : (-0,2)$; д) $\left(-4\frac{3}{5}\right) : 0,1$;

в) $6\frac{4}{7} \cdot (-2)$; е) $4\frac{3}{5} \cdot (-0,1)$.

71. Выполните действия:

а) $3,52 + (17,31 - 9,56)$;

б) $6,789 - (4,761 + 11,457)$;

в) $23\frac{12}{25} - \left(12\frac{17}{50} + 12\frac{13}{50}\right)$;

г) $\frac{3\frac{3}{4} \cdot 12\frac{4}{5} - 4\frac{4}{11} \cdot 4\frac{1}{8}}{11\frac{2}{3} \cdot 2\frac{4}{7}}$;

д) $\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) : \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right)$;

е) $\left(\frac{3}{8} - \frac{7}{9}\right) : \left(\frac{13}{32} - 0,40625\right)$;

ж) $4\frac{4}{7} - \left(8,1425 - 1\frac{1}{16}\right)$;

з) $\frac{6\frac{3}{5} : \frac{2}{3} + 28\frac{4}{5} : 13\frac{5}{7}}{1\frac{11}{16} : 2\frac{1}{4}}$.

72. Масса крови человека составляет около 7,5 % его общей массы. Сколько крови у человека, если его масса:

а) 38 кг;

г) 61 кг;

ж) 110 кг;

б) 42 кг;

д) 70 кг;

з) 130 кг;

в) 46 кг;

е) 96 кг;

и) 126 кг?

73. Эльба, Везер, Рейн, Темза — наиболее крупные реки, впадающие в Северное море.

а) Длина Эльбы такова, что она вместе с длиной Темзы на 179 км больше длины Рейна, вместе с длиной Везера (от истока Верры) составляет 1889 км и относится к длине Рейна как $233 : 264$. Найдите длины Рейна, Эльбы, Везера и Темзы, учитывая, что длина Рейна на 262 км больше общей длины Везера и Темзы.

б) На схеме, приведенной на рисунке 97, отражены соотношения между площадями водосборов Эльбы, Везера, Рейна и Темзы. Составьте задачу и решите ее.

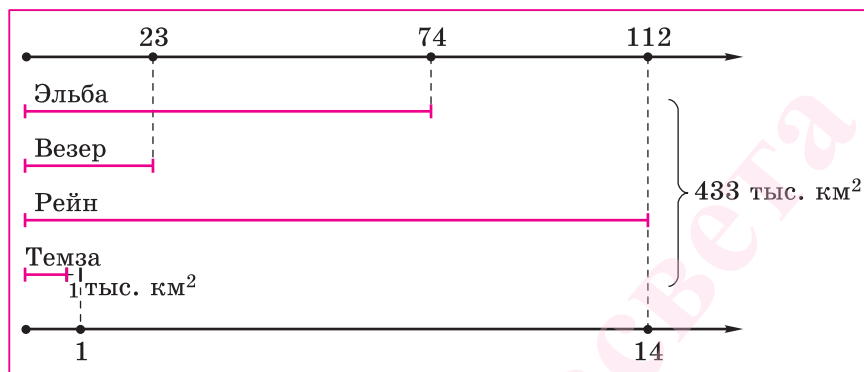


Рис. 97

в) Годовой сток Рейна равен увеличенному на 1 км^3 удвоенному общему годовому стоку Везера и Эльбы и на 9 км^3 больше увеличенного в семь раз годового стока Везера. Найдите годовые стоки Рейна, Везера, Эльбы и Темзы, учитывая, что годовой сток Эльбы на 1 км^3 меньше утроенного годового стока Везера, а годовой сток Темзы составляет $\frac{4}{5}$ годового стока Везера.

* * *

74. Площади оснований первого и второго прямоугольных параллелепипедов равны 48 см^2 и 55 см^2 , а их объемы вместе составляют 3645 см^3 . Найдите:

- высоты первого и второго параллелепипедов, учитывая, что они относятся как $5 : 3$;
- измерения основания первого параллелепипеда, учитывая, что они относятся как $4 : 3$;

в) измерения основания второго параллелепипеда, учитывая, что они отличаются на 6 см.

75. Высоты первого и второго прямоугольных параллелепипедов соответственно равны 37 см и 35 см, а объемы вместе составляют 4312 см^3 . Найдите:

а) площади оснований первого и второго параллелепипедов, учитывая, что они относятся как 7 : 8;

б) измерения основания первого параллелепипеда, учитывая, что они отличаются на 10 см;

в) измерения основания второго параллелепипеда, учитывая, что одно из них в 4 раза больше другого.

76. Самолет вылетел из города *A* в полдень и приземлился в городе *B* в 14 ч местного времени. В полночь он вылетел назад и приземлился в *A*, когда там было 6 ч утра. Сколько времени длился полет?

77. Какое наибольшее количество фишек можно расставить на шахматной доске с учетом того, что из любых двух полей, симметричных относительно поля *d4*, может быть занято фишкой только одно, а само поле *d4* должно быть незанятым?

78. Из проволоки сделан каркасный октаэдр (рис. 98). Может ли муравей проползти по каждому ребру по одному разу? А по каждому ребру куба (рис. 99)?

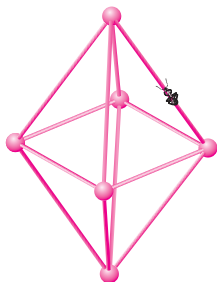


Рис. 98

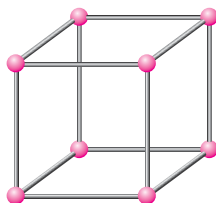


Рис. 99

II

раздел

Линейные уравнения и функции

3. Выражения и формулы

А) Выражение получается из чисел и букв с помощью знаков действий и скобок. Примерами выражений являются записи:

$$2 + 1; 1,5 \cdot (4^3 - 9,6); 6 : (8 - 2^3); \frac{1,5 \cdot 4 + 2}{8 \cdot 2 - 5 \cdot 3};$$

$$\frac{22}{7}d; x^2; 2(a + b); \frac{m - n}{p}.$$

Отдельное число или букву также считают выражением.

В первые четыре выражения не входят буквы. Это **числовые выражения**. В остальные выражения буквы входят. Это **выражения с переменными**.

Число, которое получится, если в числовом выражении выполнить все действия, называется **значением числового выражения**.

Найдем, например, значение второго из приведенных выше выражения. Для этого нам нужно, учитывая соглашение о порядке выполнения действий, сначала выполнить возведение в степень, затем вычитание и, наконец, умножение:

$$4^3 = 64; 4^3 - 9,6 = 54,4;$$

$$1,5 \cdot 54,4 = 81,6.$$

Число 81,6 — значение выражения $1,5 \cdot (4^3 - 9,6)$ (рис. 100).

$1,5 \cdot (4^3 - 9,6)$	$=$	$81,6$
Числовое выражение		Значение числового выражения

Рис. 100

Б) Если в выражение с переменными подставить вместо каждой буквы какое-нибудь ее значение, то получится числовое выражение. Его значение называют **значением выражения с переменными** при выбранных значениях переменных.

Если $p = 6$, то $\frac{p}{p+4} = \frac{6}{6+4} = \frac{6}{10} = 0,6$.

Если $p = 0,8$, то $\frac{p}{p+4} = \frac{0,8}{0,8+4} = \frac{8}{48} = \frac{1}{6}$ (рис. 101).

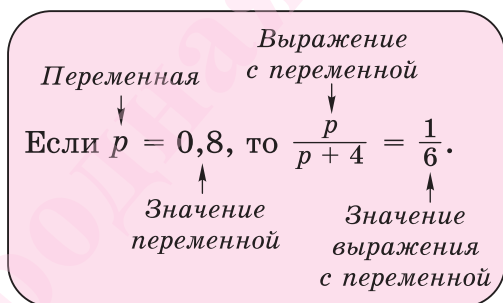


Рис. 101

При $p = -4$ значение данного выражения найти нельзя, так как в этом случае делитель $p + 4$ равен нулю. При $p = -4$ выражение $\frac{p}{p + 4}$ не имеет значения (рис. 102).

При всех $p \neq -4$ выражение $\frac{p}{p+4}$ имеет значения. Множество этих значений p называют областью определения выражения $\frac{p}{p+4}$.



Рис. 102

В) Обычно область определения выражения включает все те значения переменной, при которых выражение имеет определенное значение. Если выражение возникает при решении конкретной задачи, его область определения устанавливается условием задачи.

Если выражение содержит несколько переменных, его область определения составляют те наборы значений этих переменных, при которых выражение имеет значение. Например, область определения выражения $\frac{2b+a}{a-b}$ составляют все пары (a, b) неравных чисел, а область определения выражения $\frac{m-n}{p}$ составляют любые тройки (m, n, p) чисел, в которых третий компонент не равен нулю.

Г) Если два выражения соединить знаком равенства или неравенства, то получится **формула**.

Формулами записываются свойства арифметических действий. Например, переместительное свойство сложения выражается формулой

$$a + b = b + a;$$

сочетательное свойство умножения — формулой

$$a(bc) = (ab)c;$$

распределительное свойство умножения относительно сложения — формулой

$$a(b + c) = ab + ac;$$

свойство деления суммы на число — формулой

$$(a + b) : c = a : c + b : c;$$

свойство квадрата числа — формулой

$$m^2 \geq 0.$$

Названные формулы истинны при любых значениях переменных. Такие формулы называют **тождествами**.

Формулами записываются и другие свойства. Например, свойство длин сторон a , b , c треугольника (рис. 103) можно передать формулой

$$a < b + c;$$

свойство величин углов A , B , C треугольника — формулой

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ.$$

Д) Формулами удобно записывать *зависимости* между величинами. Например, зависимость между длиной окружности C и ее диаметром d (рис. 104) передается формулой

$$C = \pi d;$$

зависимость между периметром прямоугольника P и его измерениями a и b (рис. 105) — формулой

$$P = 2(a + b);$$

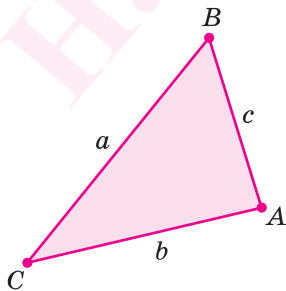


Рис. 103

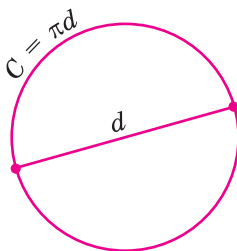


Рис. 104

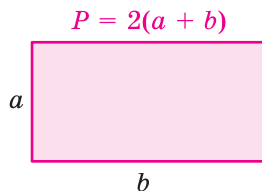


Рис. 105

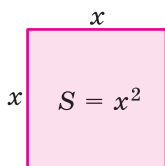


Рис. 106

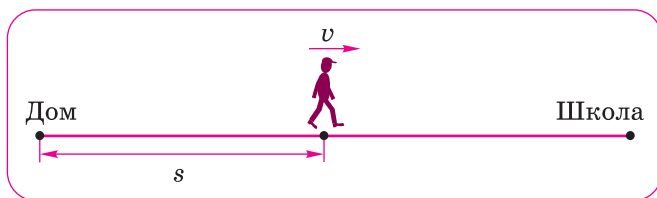


Рис. 107

зависимость между площадью квадрата S и длиной x его стороны (рис. 106) — формулой

$$S = x^2;$$

зависимость пройденного пути s от скорости v и времени t при равномерном движении (рис. 107) — формулой

$$s = v \cdot t.$$

Смысл той или иной формулы можно передать разными словесными формулировками. Например, формулу $(a + b) : c = a : c + b : c$ можно прочесть как *утверждение: частное от деления суммы на число равно сумме частных, полученных от деления каждого слагаемого на это число*. Эту формулу можно прочесть и как *правило: чтобы разделить сумму на число, можно на это число разделить каждое слагаемое и полученные результаты сложить*.

Формулу $s = v \cdot t$ можно передать утверждением: *пройденный путь равен произведению скорости на время движения* или правилом: *чтобы найти путь, надо скорость умножить на время движения*.



1. Как из чисел и букв получить выражение?
2. Что называют значением числового выражения? Когда говорят, что выражение не имеет значения?
3. Чем отличаются арифметические (числовые) выражения от алгебраических выражений (выражений с переменными)?
4. Что называют значением выражения с переменными при данных значениях переменных?

5. Что называют областью определения выражения с одной переменной?
6. Какую запись называют формулой?
7. Приведите примеры формул-свойств.
8. Что называется тождеством?
9. Приведите примеры формул-зависимостей.

79. Запишите числовым выражением:

- а) сумму чисел 78,9 и 45,1;
- б) разность чисел $-56,2$ и $44,3$;
- в) сумму чисел $-5,67$ и $89,11$;
- г) разность чисел $14\frac{23}{25}$ и $-19\frac{11}{50}$;
- д) сумму чисел $-45,2$ и $-9,88$;
- е) разность чисел $-12\frac{3}{14}$ и $-11\frac{13}{42}$;
- ж) произведение чисел $-4\frac{7}{10}$ и $-1\frac{3}{7}$;
- з) частное от деления числа $1,2$ на число 12 ;
- и) произведение чисел 2 , $3,1$ и -6 ;
- к) половину числа $23,86$;
- л) полусумму чисел $2,2$ и -78 ;
- м) полуразность чисел $1\frac{3}{5}$ и $-9\frac{1}{5}$.

80. Прочитайте словами выражение:

а) $17,08 + 14,6$;	ж) $2,36 \cdot 4,05$;
б) $(-3,62) + 27,19$;	з) $10,24 : 32$;
в) $(-25,2) - 4,35$;	и) $2,5 \cdot 4,2 \cdot (-5,6)$;
г) $4\frac{7}{74} - (-3\frac{15}{37})$;	к) $2^3 \cdot 5,5$;
д) $2 \cdot (-4,55 + 9,78)$;	л) $(12,2 + (-2,8)) : 2$;
е) $\frac{1}{2} \cdot (14,32 - 8,5)$;	м) $(3^3 - 2^2) : 5$.

81. Прочитайте как утверждение и как правило формулу:

- а) периметра прямоугольника;
- б) объема прямоугольного параллелепипеда (рис. 108);
- в) нахождения произведения двух обыкновенных дробей;
- г) вычитания суммы из числа.

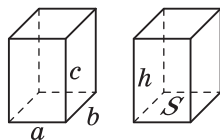


Рис. 108

82. Найдите значение выражения $2 \cdot (5a + 3b)$ при данных значениях переменных a и b :

- а) $a = 3, b = 2$; г) $a = 0, b = 8$;
б) $a = -1, b = 2$; д) $a = 4, b = -5$;
в) $a = -2, b = -5$; е) $a = 3, b = -5$.

83. Запишите выражение и найдите его значение, используя схему, приведенную на рисунке:

- a) 109; б) 110.

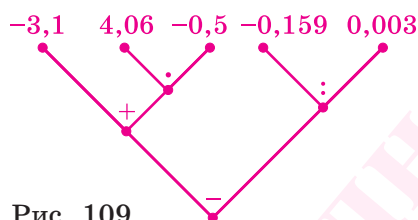


Рис. 109

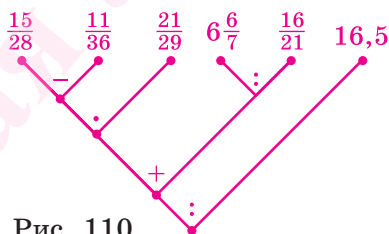


Рис. 110

84. Найдите значение выражения:

- a) $12\frac{8}{9} : 4 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{24}$;
- б) $\left(\frac{1}{4} + \frac{7}{18}\right) \cdot 1\frac{1}{23} - 1$;
- в) $5 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)$;
- г) $1\frac{5}{11} : 1\frac{1}{11} - 1\frac{1}{9} \cdot 1\frac{1}{5} - 7\frac{5}{7}$;
- д) $\left(3\frac{3}{7} \cdot 2\frac{5}{8} - 16\right) : 5\frac{1}{4} + 11\frac{11}{15}$;
- е) $4\frac{56}{157} + \frac{17}{139} : \left(\frac{9}{20} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)$.

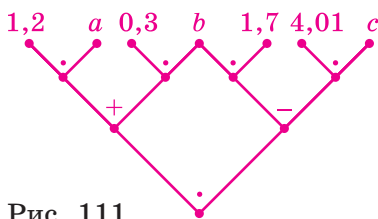


Рис. 111

85. Запишите выражение, используя схему, показанную на рисунке 111. Найдите числа, которых не хватает в столбцах таблицы.

Значение переменной a	0	-1,5	100	-13	-0,12		
Значение переменной b	0	6	10	-13	-0,12		
Значение переменной c	7	-154	100	-13	-0,12		
Значение выражения						8,3	18,3
	а)	б)	в)	г)	д)	е)	ж)

86. Запишите выражением число, содержащее:

- а) a десятков и 1 единицу;
- б) a сотен и b десятков;
- в) a сотен b десятков и 2 единицы;
- г) a сотен b десятков и c единиц;
- д) a тысяч b десятков и 6 единиц;
- е) a десятков тысяч b тысяч c сотен и 6 единиц;
- ж) a сотен тысяч 3 десятка тысяч s сотен и 9 единиц;
- з) h миллионов 5 тысяч f десятков и k единиц.

87. Запишите выражением, сколько:

- а) килограммов в t т;
- б) килограммов в a т b ц;
- в) метров в r км;
- г) сантиметров в t км и d м;
- д) минут в z ч;
- е) секунд в t ч и r мин;
- ж) квадратных метров в a га b а и c м².

88. Прочитайте словами выражение с переменными:

а) $a + 3$;	г) $3 \cdot (a + b)$;	ж) $\frac{1}{2} \cdot (x^2 - 4)$;
б) $a + b$;	д) $2 \cdot (a - 3b)$;	з) $(x + 2)^2$;
в) $2a - 5$;	е) $c^2 + 1$;	и) $(a + b)^2$.

89. Составьте выражение для решения задачи:

- а) Урожайность ржи на одном участке площадью a га составила 19 ц/га, а на другом площадью b га — 24 ц/га. Сколько тонн ржи собрали с обоих участков вместе?
- б) Турист прошел s км пешком, а затем три часа ехал на машине со скоростью 50 км/ч. Сколько километров преодолел турист?
- в) Расстояние между двумя пристанями равно s км. Собственная скорость моторной лодки равна v км/ч, скорость течения реки — a км/ч. Какое время затратила лодка на путь от одной пристани до другой и на обратный путь?
- г) Смешали a кг чая по k р. за килограмм и 12 кг чая по l р. за килограмм. Какова цена 1 кг смеси?

90. Найдите область определения выражения:

а) $\frac{4}{c}$;	д) $\frac{z-5}{z+3}$;	и) $\frac{t^3+12}{10-5t}$;
б) $\frac{4\frac{1}{3}}{x}$;	е) $\frac{4,1+n}{7-n}$;	к) $\frac{a^2}{9a-3}$;
в) $7,4 - \frac{8}{k}$;	ж) $\frac{y^2}{6y-3}$;	л) $\frac{9q+2}{q^2}$;
г) $\frac{6-w}{w}$;	з) $\frac{p^2-9}{2p-8}$;	м) $\frac{6f-18}{f^3}$.

91. Определите, какой смысл имеет выражение:

- а) $a \cdot b$, если a и b — длины сторон прямоугольника;
- б) $a \cdot b \cdot c$, если a , b , c — измерения прямоугольного параллелепипеда;

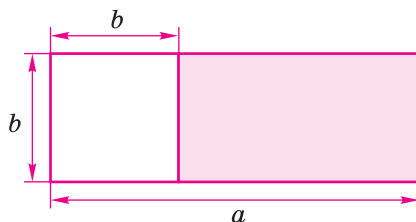


Рис. 112

- в) a^2 , если a — длина стороны квадрата;
 г) a^3 , если a — длина ребра куба;
 д) $2(a + b)$, если a и b — длины сторон прямоугольника;
 е) $4a$, если a — длина стороны квадрата;
 ж) $a \cdot b - b^2$, если a и b — длины сторон прямоугольников (рис. 112);
 з) $\frac{ab}{b^2}$, если a и b — длины сторон прямоугольников (см. рис. 112);
 и) $\frac{b^2}{ab}$, если a и b — длины сторон прямоугольников (см. рис. 112);
 к) $\frac{V}{a}$, если V — объем прямоугольного параллелепипеда, а a — одно из его измерений (см. рис. 108);
 л) $\frac{V}{S}$, если V — объем прямоугольного параллелепипеда, а S — площадь одной из его граней (см. рис. 108).

92. Запишите одно выражение для площади, а другое для периметра фигуры, представленной на рисунке:

- а) 113; б) 114.

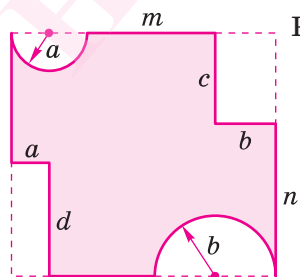


Рис. 113

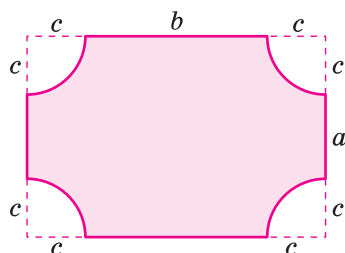


Рис. 114

93. Найдите значение выражения $\frac{8,4}{x-1,5}$ при x , равном:

- а) 3,5; в) 2,1; д) 0,6;
б) $2\frac{2}{3}$; г) -0,9; е) 0.

94. Вычислите значение выражения:

а) $(1,3a + 0,01b) : (a + b)$ при $a = -6,9$; $b = 1,03$ с точностью до сотых;

б) $\frac{m-n}{n-m}$ при $m = 4\frac{9}{20}$, $n = -2,755$ с точностью до тысячных;

в) $|7,5x - 4,3y|$ при $x = -1\frac{4}{5}$, $y = 2\frac{3}{4}$ с точностью до сотых;

г) $\left(2\frac{1}{3}r\right)^2 - \left(-1\frac{1}{2}s\right)^3$ при $r = -0,702$, $s = \frac{8}{15}$ с точностью до сотых.

95. Используя три раза цифру 2, составьте шесть разных выражений, значение каждого из которых равно 2.

96. Запишите с помощью переменных:

- а) распределительное свойство умножения относительно сложения;
б) переместительное свойство умножения;
в) сочетательное свойство сложения;
г) правило умножения дроби на дробь;
д) правило деления дроби на натуральное число;
е) правило вычисления площади квадрата;
ж) правило нахождения дроби от числа;
з) правило нахождения периметра треугольника.

97. Запишите формулой утверждение:

- а) число 1,56 — положительное;
б) число -13,77 — отрицательное;
в) число a — неположительное;

- г) число b — неотрицательное;
 д) число s больше или равно числу r ;
 е) число t не меньше числа p ;
 ж) число m меньше или равно числу n ;
 з) число c не больше числа d .

98. Температуры C и R , измеренные термометрами Цельсия и Реомюра соответственно, связаны формулой $C = \frac{5}{4} R$ (рис. 115). Найдите с точностью

до десятой температуру по Реомюру, если по Цельсию она равна:

а) 24° ;	г) 0° ;	ж) -37° ;
б) 100° ;	д) $36,6^\circ$;	з) -100° ;
в) 56° ;	е) 224° ;	и) -65° .

99. Зависимость объема V прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием от длины a стороны квадрата и высоты h (рис. 116) выражена формулой $V = a^2 \cdot h$. Найдите значение V , если значения a и h соответственно равны:

а) 1 и 1;	е) 0,4 и 0,3;
б) 1 и 23,6;	ж) 12 и 4,2;
в) 1 и 231;	з) 3,2 и 10;
г) 3 и 4;	и) $\frac{3}{7}$ и $\frac{7}{9}$;
д) 0,3 и 0,4;	к) $\frac{2}{3}$ и $\frac{2}{5}$.

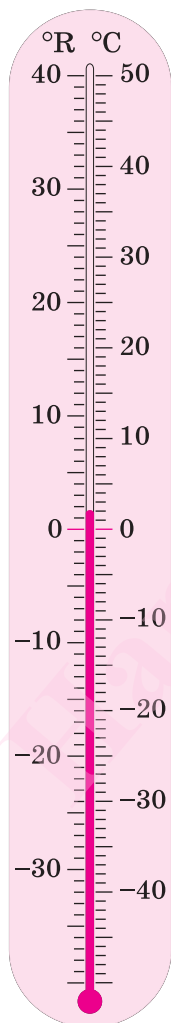


Рис. 115

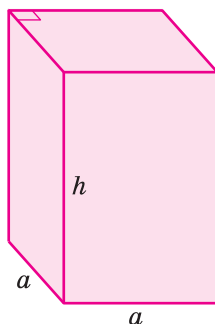


Рис. 116

100. Найдите с точностью до десятой температуру по Цельсию, если по Реомюру она равна:

- а) 25° ; г) $45,8^{\circ}$; ж) -13° ; к) -1° ;
 б) 100° ; д) 104° ; з) -78° ; л) 80° ;
 в) 0° ; е) 500° ; и) -5° ; м) -80° .

101. Плотность ρ вещества, его масса m и объем V связаны формулой $m = \rho V$. Найдите в граммах на кубический сантиметр плотность:

- а) меди, если медный кубик с ребром 2 см имеет массу 70,4 г;
 б) льда, если ледяной кубик с ребром 8 см имеет массу 460,8 г;
 в) бетона, если бетонный куб с ребром 60 см имеет массу 432 кг.

102. Найдите значения выражений и переменных, недостающих в таблице.

t	-5	4,3	-11,5	0						
$2 - 3t$					0		-12	1,2		-7,8
$3t - 2$						12			-1,2	

Какими числами являются соответствующие значения выражений $2 - 3t$ и $3t - 2$? Запишите свою гипотезу формулой.

103. Заполните следующую таблицу, перечертив ее в тетрадь.

x	-9	-5	-3,5	-1	-0,4	0	0,5	1	1,6	2	
$x^2 + 4x$											
$5x + 2$											77

Что можно утверждать о значениях выражений $x^2 + 4x$ и $5x + 2$ при значениях переменной x , приве-

денных в таблице? Какую гипотезу вы можете выдвинуть? Запишите ее формулой.

104. Истинна ли формула $\left| x + \frac{1}{x} \right| > 2$, если:

- а) $x = 4$; д) $x = -150$; и) $x = \frac{10}{11}$;
 б) $x = -5$; е) $x = -\frac{1}{2}$; к) $x = -3,14$;
 в) $x = 0,8$; ж) $x = -3,2$; л) $x = 7$;
 г) $x = 0,01$; з) $x = -1,2$; м) $x = -\frac{1}{3}$?

Какую гипотезу вы можете выдвинуть?

105. Запишите в тетрадь те формулы, которые истинны при любых значениях переменных:

- а) $a - (b + c) = a - b - c$; д) $a - (b - c) = a - b + c$;
 б) $a : bc = a : b : c$; е) $(a + b) : c = a : c + b : c$;
 в) $a(b : c) = ab : c$; ж) $a : (b + c) = a : b + a : c$;
 г) $a - (b - c) = a - b - c$; з) $(a + b) - c = (a - c) + b$.

106. По формуле $m = \frac{1}{2} \cdot (x + y + |x - y|)$ найдите значение переменной m , если:

- а) $x = 4$; $y = 6$; е) $x = 4,6$; $y = 0$;
 б) $x = -4$; $y = 5$; ж) $x = -2,7$; $y = -1,3$;
 в) $x = 3$; $y = -7$; з) $x = 0$; $y = -4,86$;
 г) $x = -3,2$; $y = 3,4$; и) $x = \frac{5}{8}$; $y = -\frac{3}{8}$;
 д) $x = -2,4$; $y = 1,6$; к) $x = 4,7$; $y = -1,5$.

Какую гипотезу вы можете выдвинуть?

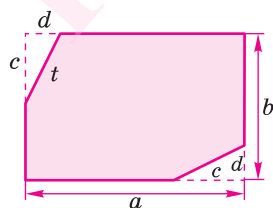


Рис. 117

107. Найдите периметр P и площадь S фигуры, представленной на рисунке:

- а) 117; б) 118; в) 119.

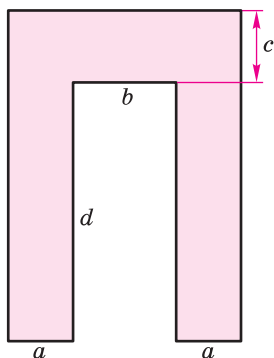


Рис. 118

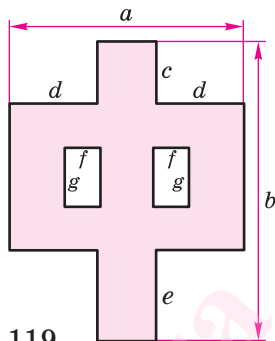


Рис. 119

108. Три прямые пересекаются в одной точке. Сколько при этом образуется лучей?

109. Сколько лучей определяют взятые на прямой две; три; четыре точки?

110. На прямой отмечено четыре точки. Сколько отрезков они определяют?

111. На рисунке 120 отрезки AB и CD равны. Какие еще равные отрезки есть на этом рисунке?

112. Выпишите пары равных отрезков на рисунке 121, учитывая, что отрезки PQ и RS равны, а M — середина отрезка QR .

113. Отметьте в тетради две точки. Постройте отрезок и ломаную из трех звеньев с концами в отмеченных точках. Измерьте длины отрезка и звеньев ломаной. Сделайте соответствующие записи. Сравните длину отрезка с длиной ломаной. Сделайте вывод.

114. На прямой отмечены точки A, B, C и D , причем $AB = 1$ см, $BC = 3$ см, $CD = 5$ см. Каким может быть расстояние между точками A и D ? Как изменится ответ, если точки A, B, C и D выбираются не обязательно на одной прямой?



Рис. 120



Рис. 121

115. В бассейн проведены две трубы. Через первую он наполняется за 2 ч, а через вторую опорожняется за 3 ч. Когда открыли обе трубы, то в бассейне через 15 мин стало 125 л воды. Какова вместимость бассейна?

116. 1 см³ керосина имеет массу $\frac{4}{5}$ г, а 1 см³ бензина — на $\frac{1}{10}$ г меньше. Определите массу 1 см³ смеси, в которой 24 доли керосина и 1 доля бензина.

117. В таблице приведены площади поверхности и массы Солнца, планет Солнечной системы и спутника Земли — Луны (рис. 122). С помощью калькулятора найдите числа, которые отсутствуют в столбцах таблицы.



Рис. 122

Небесное тело	Площадь поверхности		Масса	
	млн км ²	Процент по отношению к Земле	млрд Тт	Процент по отношению к Земле
Солнце	6 090 000		$2 \cdot 10^6$	
Меркурий		14,6		5,5
Венера	460			82
Земля	510		5,98	
Луна	38		0,0735	
Марс		28,2		11
Юпитер	64 100		1900	
Сатурн		8961		9498
Уран	8240		87	
Нептун		1516	103	

118. Велосипедист выехал из пункта А в 8 ч со скоростью 16 км/ч. Через 1,5 ч он сделал остановку на 30 мин, а затем поехал с прежней скоростью. В 11 ч за ним выехал мотоциклист со скоростью 56 км/ч. Когда и на каком расстоянии от А мотоциклист догонит велосипедиста?

119. Определите урожай картофеля с 1 га и площадь участка, с которого его собрали, учитывая, что если бы урожайность была равной 20,25 т/га, то картофеля собрали бы на 52,5 т меньше, а если бы урожайность была равной 20,75 т/га, то картофеля собрали бы на 31,5 т меньше.

* * *

120. Футбольная команда сыграла три матча: один выиграла, один проиграла и один сыграла вничью. При этом она забила 3 мяча и пропустила 1. С каким счетом закончился каждый матч?

121. Расшифруйте арифметический ребус, в котором разные буквы обозначают разные цифры, а одинаковые буквы — одинаковые цифры:

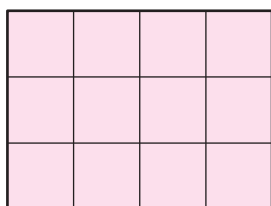


Рис. 123

$$B + \frac{A + B}{A} = AB.$$

122. Прямоугольник на рисунке 123 состоит из 12 одинаковых квадратиков. По сторонам квадратиков его нужно разрезать на две равные части. Сколькими способами это можно сделать? А если бы прямоугольник был размерами 4 на 5?

4. Тождественные преобразования выражения

А) Вы знаете, что выражение, содержащее несколько последовательных сложений и вычитаний, можно записать как сумму.

Например,

$$\begin{aligned} 3m - 7 - 6n + 5mn &= \\ = 3m + (-7) + (-6n) + 5mn. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3m - 7 - 6n + 5mn \\ \text{Алгебраическая сумма} \\ \text{слагаемых} \\ 3m, -7, -6n, +5mn \end{aligned}$$

Поэтому подобные выражения называют **алгебраическими суммами** (рис. 124).

Рис. 124

Преобразовывать выражения позволяют свойства арифметических действий.

Пример 1. Упростим выражение $3(2 + t) - 2t$.

Используя свойства арифметических действий, получим:

$$\begin{aligned} 3(2 + t) - 2t &= (3 \cdot 2 + 3 \cdot t) - 2t = 3 \cdot 2 + (3 \cdot t - 2 \cdot t) = \\ &= 3 \cdot 2 + (3 - 2) \cdot t = 6 + 1 \cdot t = 6 + t. \end{aligned}$$

Значит,

$$3(2 + t) - 2t = 6 + t.$$

Здесь использованы distributive свойство умножения относительно сложения — переход (1), свойство вычитания из суммы — переход (2), distributive свойство умножения относительно вычитания — переход (3), замена числовых выражений их значениями — переход (4) и свойство единицы при умножении — переход (5).

Б) Понятно, что если в примере 1 букву t во всех выражениях заменить одним и тем же числом, то получатся числовые выражения с одинаковыми значениями. Запись

$$3(2 + t) - 2t = 6 + t$$

надо понимать именно так: числовые значения выражений $3(2 + t) - 2t$ и $6 + t$ всегда одинаковы при одинаковых значениях переменной t . Такие выражения называются **тождественно равными** (или, короче, **равными**) (рис. 125). Замена выражения

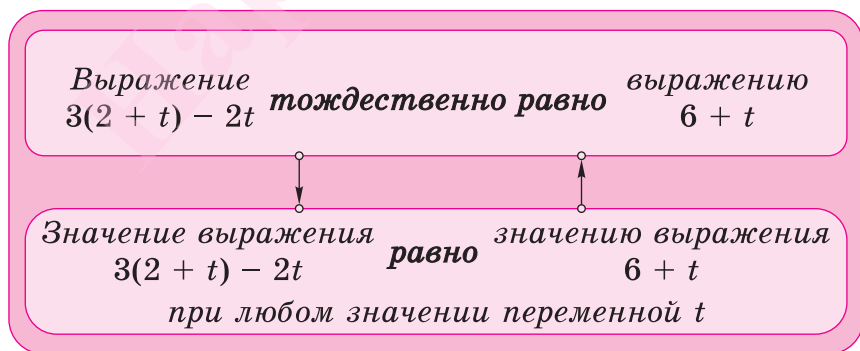


Рис. 125

$$3(2 + t) - 2t = 6 + t$$

Тождественное преобразование
Тождественное преобразование

Рис. 126

тождественно равным ему выражением называется **тождественным преобразованием** этого выражения (рис. 126).

В) Знакомое вам раскрытие скобок является тождественным преобразованием. Напомним, как оно выполняется.

Пример 2. Раскроем скобки в выражении

$$-2(3u - v + w).$$

Данное выражение есть произведение числа -2 и алгебраической суммы $3u + (-v) + w$. Распределительное свойство умножения позволяет это произведение записать суммой произведений числа -2 на отдельные слагаемые:

$$(-2) \cdot (3u + (-v) + w) = (-2) \cdot (3u) + (-2) \cdot (-v) + (-2) \cdot w.$$

Вычислим частичные произведения:

$$(-2) \cdot (3u) = ((-2) \cdot 3) \cdot u = -6u; \quad (-2) \cdot (-v) = +2v; \\ (-2) \cdot w = -2w.$$

Поэтому

$$-2(3u - v + w) = (-6u) + (+2v) + (-2w) = -6u + 2v - 2w.$$

Раскрытие скобок — это замена выражений $a(b + c)$ и $(a + b)c$ выражениями $ab + ac$ и $ac + bc$ соответственно.

Пример 3. Раскроем скобки в выражении

$$2a + (3 + x).$$

Учитывая свойство числа 1 при умножении, получим:

$$2a + (3 + x) = 2a + 1 \cdot (3 + x) = 2a + 1 \cdot 3 + 1 \cdot x = \\ = 2a + 3 + x.$$

Так же:

$$9m + (6a - 1 + 2c) = 9m + 6a - 1 + 2c; \\ 3 + (-k + t) = 3 - k + t.$$

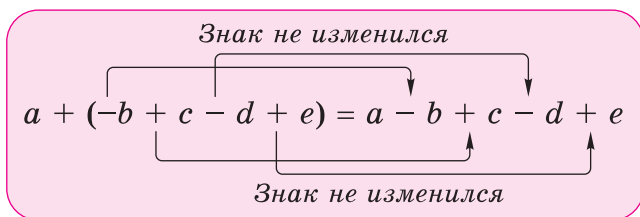


Рис. 127

Если перед скобками, заключающими выражение, стоит знак «+», то скобки можно опустить, сохранив знак каждого слагаемого (рис. 127).

Пример 4. Раскроем скобки в выражении $5b - (3c - 4)$. Учитывая, что

$$5b - (3c - 4) = 5b + (-(3c - 4))$$

и что

$$-(3c - 4) = (-1) \cdot (3c + (-4)),$$

получим:

$$\begin{aligned} 5b - (3c - 4) &= 5b + (-1) \cdot (3c + (-4)) = \\ &= 5b + (-1) \cdot (3c) + (-1) \cdot (-4) = 5b - 3c + 4. \end{aligned}$$

Так же:

$$\begin{aligned} 9t - (6a - 1 + 2c) &= 9t - 6a + 1 - 2c; \\ 3 - (-k + t) &= 3 + k - t. \end{aligned}$$

Если перед скобками, заключающими выражение, стоит знак «-», то скобки можно опустить, изменив знак каждого слагаемого на противоположный (рис. 128).

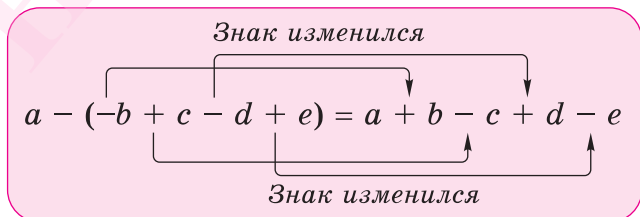


Рис. 128

$$\begin{array}{l}
 \text{Вынесение общего} \\
 \text{множителя за скобки} \\
 \boxed{ab + ac} = \boxed{a(b + c)} \\
 \boxed{ac + bc} = \boxed{(a + b)c} \\
 \text{Вынесение общего} \\
 \text{множителя за скобки}
 \end{array}$$

Рис. 129

$$\begin{array}{l}
 \text{Раскрытие} \\
 \text{скобок} \\
 \boxed{a(b + c)} = \boxed{ab + ac} \\
 \text{Вынесение общего} \\
 \text{множителя за скобки}
 \end{array}$$

Рис. 130

Распределительное свойство умножения относительно сложения можно записать так:

$$ab + ac = a(b + c); ac + bc = (a + b)c.$$

Замену суммы двух произведений, имеющих общий множитель, произведением общего множителя и суммы остальных двух множителей называют **вынесением общего множителя за скобки** (рис. 129).

Вынесение общего множителя за скобки является тождественным преобразованием выражения, обратным раскрытию скобок (рис. 130).

Пример 5. а) $4a + 2a = a(4 + 2) = a \cdot 6 = 6a$;

б) $7x - x = x(7 - 1) = x \cdot 6 = 6x$.

Слагаемые $4a$ и $2a$, $7x$ и $-x$ имеют одинаковые буквенные части и отличаются только числовыми множителями. Такие слагаемые называют **подобными**. Замену подобных слагаемых одним слагаемым называют **приведением подобных слагаемых**.

Чтобы привести подобные слагаемые, нужно сложить их числовые множители и результат умножить на общую буквенную часть.



1. Какие выражения с переменными называют равными?
2. Что называют тождественным преобразованием выражения?

3. Как понимать задание *Раскройте скобки*? На каком свойстве основано раскрытие скобок?
4. Как раскрыть скобки, перед которыми стоит знак «+»?
5. Как раскрыть скобки, перед которыми стоит знак «-»?
6. Как заключить в скобки группу слагаемых алгебраической суммы?
7. Какое тождественное преобразование выражения называют вынесением общего множителя за скобки?
8. Какие слагаемые называются подобными?
9. Какое тождественное преобразование выражения называют приведением подобных слагаемых?
10. Как привести подобные слагаемые?

123. Найдите выражения с одинаковыми значениями и запишите соответствующие равенства:

$$3 + 6; \quad 20 \cdot 25 - 25 \cdot 20; \quad 5 - 2^2; \\ 3^2 - 2^3; \quad 63 : 7; \quad 22 + (-12) + (-10).$$

124. Найдите наиболее простым способом значения выражения:

- а) $3,5 - 6,7 + 6,5 - 11,3$;
- б) $21,3 - 6,4 + 7,7 + 5,4 - 7,6$;
- в) $20 \cdot 25 \cdot 17 \cdot 50 \cdot 4$;
- г) $60 \cdot 23 - 40 \cdot 33 + 60 \cdot 47 - 60 \cdot 67$;
- д) $ab + ac$ при $a = -5\frac{7}{13}$, $b = 8\frac{4}{13}$, $c = 4\frac{9}{13}$;
- е) $ac - bc$ при $a = 2\frac{4}{11}$, $b = -8\frac{4}{13}$, $c = 9\frac{2}{11}$.

125. Упростите выражение:

- а) $a + 2 + a + a$;
- в) $b \cdot b - 2$;
- д) $2x + 3x$;
- б) $-a + 5 + a + a$;
- г) $c^3 : c^2$;
- е) $5z - z$.

126. Автомобиль ехал a ч со скоростью 60 км/ч и b ч со скоростью 72 км/ч. Запишите формулу средней скорости автомобиля. Найдите ее, если:

- а) $a = 2$, $b = 3$;
- б) $a = 2\frac{1}{3}$, $b = 2\frac{2}{3}$.

127. Найдите два числа, одно из которых противоположно, а второе обратно:

- а) сумме чисел $-4,2$ и $6,7$;
- б) разности чисел $-\frac{5}{6}$ и $-0,75$;
- в) произведению чисел $2,5$ и $-1,6$;
- г) частному чисел -43 и $6\frac{1}{7}$.

128. Запишите выражением:

- а) сумму частного чисел m и n и числа l ;
- б) произведение суммы чисел r и s на число t ;
- в) разность числа a и частного чисел b и c ;
- г) частное разности чисел x и y на их полусумму.

129. Докажите, что (рис. 131):

ab делится на a

ab делится на b

Рис. 131

- а) сумма $37 \cdot 18 + 18 \cdot 23$ делится на 5;
- б) сумма $91 \cdot 73 + 91 \cdot 70$ делится на 11;
- в) разность $42 \cdot 86 - 42 \cdot 219$ делится на 19;
- г) разность $67 \cdot 29 - 222 \cdot 29$ делится на 31.

130. Раскройте скобки:

а) $-3(k - 3l + 2)$;	ж) $(f - 15a - n) \cdot (-5)$;
б) $5(9 - 2x + 5a)$;	з) $(-3r + 12 - s) \cdot (-1)$;
в) $7(1 - 4d - f)$;	и) $-(-6 + 2d + r)$;
г) $(2 - 5z + 3) \cdot 2$;	к) $(-4a - 4b - c) \cdot (-2)$;
д) $-(11 - 12y - x)$;	л) $-9(-m + 3n - 12k)$;
е) $-(-q + 6s - 2a)$;	м) $-6(2 - s - 12p)$.

131. Запишите разность выражений и упростите результат:

а) $-6 - w$ и $w + 6$;	г) $45 - k$ и $k - 46$;
б) $a - 3,6$ и $3,6 - b$;	д) $-3v + 2w$ и $4v - w$;
в) $m - n$ и $n - m$;	е) $6,6z - 2,2t$ и $t - z$.

132. Используя скобки, запишите суммой двух слагаемых выражение:

- а) $2a - 3b + 5c - 13$;
- б) $2z + 4t - 22u - v + w$;
- в) $4 - 2p - 9r + s - 7t - z$;
- г) $15k - 11l + 1,5n - m - 4t + p - 2r$.

Сколькими способами это можно сделать?

133. Запишите выражение $w + x - y + z$:

- а) суммой двух слагаемых, из которых одно $w + x$;
- б) суммой двух слагаемых, из которых одно $w - y$;
- в) разностью с уменьшаемым $w - y$;
- г) разностью с вычитаемым $y - x$.

134. Решите уравнение:

- а) $3 - 2(x - 3) = 2$;
- б) $-7(2y + 3) + 6 = 13$;
- в) $4(4 - 3z) - 13 = -33$;
- г) $(3y - 29) - 35 = 44$;
- д) $-(14 - 4q) + 53 = 71$;
- е) $\left(2f + \frac{7}{18}\right) - \frac{7}{12} = -\frac{2}{9}$.

135. Вычислите:

- а) $4,67 \text{ кг} + 1,33 \text{ кг}$;
- б) $23,9 \text{ м}^3 - 19,9 \text{ м}^3$;
- в) $1,45 \text{ см} - 0,98 \text{ см}$;
- г) $6 \text{ кг } 120 \text{ г} - 4,5 \text{ кг}$;
- д) $2 \text{ га } 75 \text{ а} + 3 \text{ га } 96 \text{ а}$;
- е) $3 \text{ км}^2 - 13,4 \text{ га}$;
- ж) $5540 \text{ см}^3 - 3 \text{ дм}^3 55 \text{ см}^3$;
- з) $12 \text{ Мт} - 126 \text{ кт}$.

136. Вынесите общий множитель за скобки и затем вычислите:

- а) $576 \cdot 0,705 + 576 \cdot 1,295$;
- б) $0,647 \cdot 6,46 + 9,54 \cdot 0,647$;
- в) $0,987 \cdot 0,652 - 0,987 \cdot 0,452$;
- г) $67,3 \cdot 3,87 - 4,87 \cdot 67,3$;
- д) $97,4^2 + 2,6 \cdot 97,4$;
- е) $6,45 \cdot 12,45 - 6,45^2$;
- ж) $44,9 \cdot 55,1 + 55,1^2$;
- з) $6,84 \cdot 7,47 - 7,47^2$.

137. Выполните вычитание:

- а) $3q^2 - (-2q^2)$;
- б) $-13z^2 - (-10z^2)$;
- в) $5s^3 - (+3s^3)$;
- г) $-er - (+er)$;
- д) $-12vw - (6vw)$;
- е) $2ab^2 - (-0,5ab^2)$;
- ж) $(-3d) - (-3d)$;
- з) $-p - \left(+\frac{1}{2}p\right)$;

и) $\frac{2}{3}a - \left(-\frac{5}{6}a\right);$

л) $2,3h^2 - \left(-\frac{4}{5}h^2\right);$

к) $-0,7m^2n - (-2,1m^2n);$

м) $1\frac{1}{4}k^3 - \left(2\frac{3}{4}k^3\right).$

138. Приведите подобные слагаемые:

а) $2x + 3x - 4x;$

д) $6c + 4c - 5c;$

б) $y + 2y - 3y;$

е) $-3d - 4d - 5d;$

в) $a - 2a + 3a;$

ж) $-5k + 2k - 4k;$

г) $5b + 2b - 3b;$

з) $-z + 2z - 3z.$

139. Приведите подобные слагаемые:

а) $-6x + 9x - 2x + 7x;$

д) $t + 4,7t - 3,2t - t;$

б) $\frac{7}{9}s + \frac{3}{9}s - \frac{4}{9}s - \frac{1}{9}s;$

е) $-22q - 18q + 4,3q + 7,1q;$

в) $16a - 4a + 2a - 9a;$

ж) $\frac{2}{3}k + \frac{5}{6}k - \frac{11}{12}k - \frac{3}{4}k;$

г) $22d + 2d - 30d - 7d;$

з) $w + 0,9w - \frac{4}{9}w - \frac{1}{2}w.$

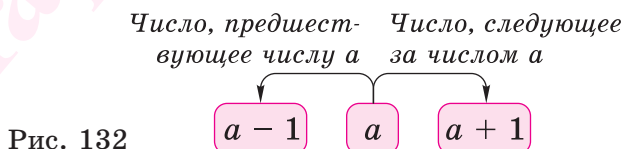
140. Запишите четыре последовательных целых числа (рис. 132), большее из которых равно a . Найдите:

а) сумму этих чисел;

б) разность между суммой двух первых и суммой двух последних чисел;

в) разность между суммой двух первых и разностью двух последних чисел;

г) разность между суммой двух крайних и суммой двух средних чисел.



141. Решите уравнение:

а) $-(3 - 2x) - 5x = 12;$

г) $2(a + 1) - 4a = 2;$

б) $y - 2(5 + 2y) = -10;$

д) $3b - (4 - 3b) = 8;$

в) $-6z - 3(7 - 2z) = 12;$

е) $3c + 6 - (4 + 3c) = 2.$

142. Решите уравнение:

- а) $-5(1,2 - 2x) - 4x = 12$;
- б) $3,7p - 1,4(-5 + 2p) = -1,1$;
- в) $-15c - 5(4 - 3c) = 21$;
- г) $2(a + 1) - 7a = 22$;
- д) $9b + 3(4 - 3b) = 12$;
- е) $\frac{2}{5}c - \left(\frac{5}{14} - \frac{3}{7}c\right) \cdot \left(-\frac{7}{15}\right) = \frac{1}{6}$.

143. Решите уравнение:

- а) $8 \cdot (3 - 3b) + 5 \cdot (3b + 5) = 7$;
- б) $-6 \cdot (3t + 4) + 4 \cdot (2t - 2) = 0$;
- в) $-11 \cdot (1 - 6p) - 2 \cdot (4p + 1) = 7$;
- г) $2(3w - 5) - 7(7 - 2w) = -25$;
- д) $2(4x - 3) + 3(7 - 2x) = 13$;
- е) $5 \cdot (2c + 1) - (5c + 2) = 0$;
- ж) $4(2f + 5) - 5(6 - f) = 16$;
- з) $3(5 - 2h) - 2(7 - 3h) = 1$;
- и) $2(4 - 3u) + 3(2u - 1) = 6$;
- к) $3(2a + 5) - 4(3a + 2) = 19$.

144. Приведите подобные слагаемые:

- а) $-8s^2 + s^2 + 8s^2$;
- б) $6bc - 7bc + bc$;
- в) $5x^2y - x^2y - 10x^2y$;
- г) $4cd + 5cd - 13cd$;
- д) $12v^2 - 17v^2 + 18v^2$;
- е) $d^3 + 30d^3 + 31d^3$.

145. Упростите выражение:

- а) $(a^2 - 3ab + b^2) + (-a^2 + 3ab + b^2)$;
- б) $(x^2 + x + 1) + (x^2 - x + 1)$;
- в) $(4k^2 + 2k + 1) + (-4k^2 + 2k - 1)$;
- г) $(2m^2n - 3mn^2 - 3mn) + (-mn + 5m^2n + 6mn^2)$;
- д) $(2p - q - r) + (-p + 2q - r) + (-p - q + 2r)$;
- е) $(4a^3 - 5a^2 + 3a - 2) + (3a^3 - 4a + 5) + (2a^3 - 3 + 5a + 4a^2)$;
- ж) $(4z^3 - 5z^2y + 7zy^2 - 8y^2) + (-3z^3 + 5z^2y - 2zy^2 - 5y^2)$;
- з) $-(2ab^2 - ab + b) + 3ab^2 - 4b - (5ab - ab^2)$.

146. Вычислите:

- а) $2\frac{3}{4} + \frac{5}{6}$; е) $\left(-4\frac{12}{17}\right) \cdot \left(-3\frac{43}{48}\right)$;
б) $4\frac{10}{17} + 5\frac{4}{51}$; ж) $\left(-\frac{8}{15}\right) : \left(-\frac{4}{5}\right)$;
в) $2\frac{3}{7} - \frac{5}{14}$; з) $1\frac{3}{4} : \left(-2\frac{11}{12}\right)$;
г) $1\frac{11}{39} - 2\frac{7}{26}$; и) $\left(-2\frac{9}{13}\right) : \left(-3\frac{23}{39}\right)$.
д) $\left(-3\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{5}{6}\right)$;

147. Найдите значение выражения:

- а) $2\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} + 3\frac{4}{7} \cdot \frac{1}{3}$; в) $2,83 : \frac{1}{5} + 1,27 : \frac{1}{5}$;
б) $5,35 : 2 - 1,01 : 2$; г) $3,51 \cdot 0,5 - 1,25 \cdot 0,5$.

148. Запишите формулой утверждение:

- а) a — положительное число;
б) a — отрицательное число;
в) число a больше нуля;
г) число a меньше нуля;
д) число a равно нулю;
е) a — неположительное число;
ж) a — неотрицательное число;
з) число a не равно нулю;
и) число a больше нуля или равно ему;
к) число a меньше нуля или равно ему.

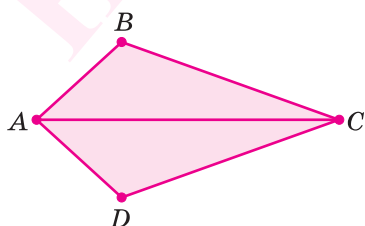


Рис. 133

149. Диагональ AC делит четырехугольник $ABCD$ на два равных треугольника (рис. 133). Найдите диагональ и стороны четырехугольника, если его периметр и периметр треугольника

равны 150 см и 140 см соответственно, а стороны AB и BC относятся как 2 : 3.

150. Отрезок BK соединяет вершину B треугольника ABC с точкой K противоположной стороны (рис. 134).

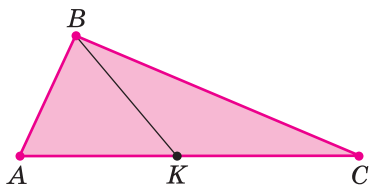


Рис. 134

Углы A и B этого треугольника соответственно равны 65° и 92° . Найдите углы треугольников ABK и CBK , учитывая, что угол $СКВ$ в два раза больше угла $ВАС$.

151. За какое время будет выполнена вся работа, если:

- а) за 2 ч выполнено $\frac{4}{15}$ всей работы;
- б) за 9 ч выполнено 0,45 всей работы;
- в) за 3 ч выполнено 24 % всей работы?

152. Хозяйство убрало 1320 га зерновых и осталось убрать еще 29,6 % их. Сколько гектаров зерновых осталось убрать?

153. При сложении двух десятичных дробей во втором слагаемом ошибочно поставили десятичную запятую на 1 знак правее, чем нужно, и вместо суммы 27,95 получили 41,9. Какие числа нужно было сложить?

154. Сха и Плиса — притоки Березины. Длина Плисы составляет 80 % длины Схи. Если бы Сха была на 8 км короче, а Плиса на столько же длиннее, то эти реки имели бы одинаковую длину. Найдите длины Схи и Плисы.

155. Средняя урожайность пшеницы на двух полях размерами $160 \text{ м} \times 120 \text{ м}$ и $200 \text{ м} \times 170 \text{ м}$ составила 22,5 ц/га. Определите урожайность на первом поле, если на втором поле собирали в среднем по 21 кг с каждых 100 м^2 .

* * *

156. На сколько частей могут разбить плоскость четыре разные прямые? Подкрепите ответы рисунками.

157. За первый день в буфете продали 1 большую и 4 средние банки сока, за второй день — 2 большие и 6 литровых банок, а за третий — 1 большую, 3 средние и 3 литровые банки. Сколько всего литров сока продали за три дня, если каждый день продавалось одинаковое количество сока?

Выигрыш — 3 очка

Ничья — 2 очка

Проигрыш — 1 очко

Рис. 135

158. В викторине из нескольких конкурсов соревновались две команды. Результат каждого конкурса оценивался в соответствии с рисунком 135.

Определите, возможно ли, чтобы викторина закончилась со счетом:

- а) $23 : 20$; б) $17 : 17$; в) $24 : 16$; г) $15 : 17$.

5. Линейное уравнение с одной переменной

А) Напомним, что **уравнением** называют равенство, содержащее переменную. Значение переменной, при котором уравнение превращается в верное равенство, называют **корнем уравнения**. **Решить уравнение** означает найти все его корни или установить, что их нет (рис. 136).

Уравнения, имеющие одни и те же корни, называют **равносильными уравнениями**.

При решении сложных уравнений их сначала упрощают, заменяя равносильными.

Пример 1. Решим уравнение $5x = 3x + 150$, которое можно наглядно представить рисунком 137.

Рассуждать можно так. Равновесие весов не нарушится, если с каждой чашки снять по 3 пачки

Уравнение	—	равенство с переменной
Корень уравнения	—	число, превращающее уравнение в истинное равенство
Решить уравнение	—	найти все корни уравнения либо доказать, что корней нет

Рис. 136

чая (рис. 138). Значит, одна пачка имеет массу $150 \text{ г} : 2 = 75 \text{ г}$.

Эти рассуждения подсказывают такой путь решения данного уравнения.

Вычтем из левой и правой частей уравнения $5x = 3x + 150$ выражение $3x$. Получим:

$$5x - 3x = 3x + 150 - 3x.$$

Слагаемые $3x$ и $-3x$ в правой части в сумме дают нуль, или, как говорят, **взаимно уничтожаются**. Поэтому $5x - 3x = 150$. Далее находим:

$$2x = 150, \text{ или } x = 75.$$



Рис. 137

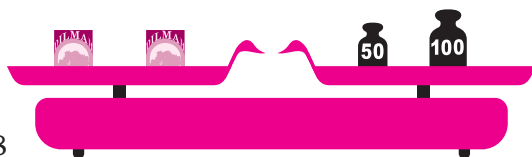


Рис. 138

Пример 2. Решим уравнение $7k + 13 = 76 - 2k$.

Если к каждой части уравнения прибавить выражение $2k$, то после приведения подобных в правой части не будет слагаемых с переменной:

$$\begin{aligned}7k + 13 + 2k &= 76 - 2k + 2k; \\7k + 13 + 2k &= 76.\end{aligned}$$

Сравнивая полученное уравнение с данным, замечаем, что слагаемое $-2k$ перешло из правой части в левую с противоположным знаком. Приводим подобные в левой части:

$$9k + 13 = 76.$$

Находим неизвестное слагаемое:

$$9k = 76 - 13.$$

Замечаем, что уравнение $9k = 76 - 13$ получается из уравнения $9k + 13 = 76$ после переноса числа 13 из левой части уравнения в правую с противоположным знаком.

Наконец находим:

$$9k = 63; k = 7.$$

Б) Видим, что *если в уравнении любое слагаемое перенести из одной части в другую, изменяя его знак, то получится уравнение, равносильное данному* (рис. 139).



Рис. 139

Переносят слагаемые так, чтобы в одной части уравнения были слагаемые с переменной, а в другой — известные числа.

Если уравнение содержит скобки, то сначала их нужно раскрыть.

Пример 3. Решим уравнение $8(2x + 3) = 3(3x - 6)$.
Сначала запишем его без скобок:

$$16x + 24 = 9x - 18.$$

Перенесем слагаемое $9x$ из правой части в левую, а слагаемое 24 — из левой части в правую с противоположными знаками:

$$16x - 9x = -18 - 24.$$

Приведем подобные слагаемые и найдем x :

$$7x = -42; x = -6.$$

При решении уравнений пользуются и таким свойством: *если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же не равное нулю число, то получится уравнение, равносильное исходному.*

Пример 4. Решим уравнение $\frac{2}{3}y + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} - y$.

Умножим левую и правую части уравнения на 6 и тем самым избавимся от дробных чисел:

$$4y + 1 = 3 - 6y.$$

Сделаем нужные переносы слагаемых и приведем подобные:

$$4y + 6y = 3 - 1; 10y = 2.$$

Разделим обе части уравнения на 10:

$$y = 0,2.$$

В) Можно рекомендовать такой *порядок упрощения уравнения*:

- 1) *избавиться от дробных чисел;*
- 2) *раскрыть скобки;*
- 3) *собрать слагаемые с переменной в одну часть уравнения, а слагаемые без переменной — в другую;*
- 4) *привести подобные.*

При решении уравнений мы сводили их к простейшему виду, например: $7x = -42$; $-p = -1,2$; $0y = 2$; $0z = 0$.

Г) Уравнение вида $ax = b$, где x — переменная, a и b — определенные числа, называется **линейным уравнением с одной переменной**.

При решении линейного уравнения нужно обращать внимание на числа a и b .

Пусть $a \neq 0$. Тогда левую и правую части уравнения $ax = b$ можно разделить на a , получим $x = \frac{b}{a}$. Видим, что линейное уравнение $ax = b$ при $a \neq 0$ имеет единственный корень — число $\frac{b}{a}$.

Пусть $a = 0$. В этом случае линейное уравнение становится таким: $0 \cdot x = b$. Понятно, что при $b \neq 0$ оно не имеет корней. Если $b = 0$, уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$, и его корнем является любое число.

Таким образом, линейное уравнение $ax = b$:

- имеет единственный корень $x = \frac{b}{a}$, если $a \neq 0$;
- не имеет корней, если $a = 0$ и $b \neq 0$;
- имеет корнем любое число, если $a = 0$ и $b = 0$ (рис. 140).

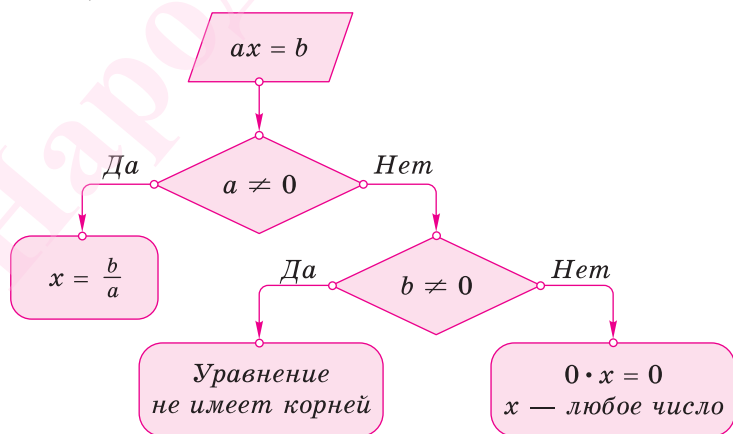


Рис. 140

Пример 5. Решим уравнение

$$4(z - 3) = z - (10 - 3z).$$

Последовательно получаем:

$$4z - 12 = z - 10 + 3z;$$

$$4z - z - 3z = -10 + 12;$$

$$(4 - 1 - 3)z = -2;$$

$$0 \cdot z = -2.$$

Полученное уравнение не имеет корней, поэтому равносильное ему уравнение $4(z - 3) = z - (10 - 3z)$ также не имеет корней.

Пример 6. Решим уравнение $5 - 2x = 1 + 2(2 - x)$.

$$5 - 2x = 1 + 4 - 2x;$$

$$-2x + 2x = 1 + 4 - 5;$$

$$0 \cdot x = 0.$$

Корнем уравнения $0 \cdot x = 0$ является любое число. Значит, и уравнение $5 - 2x = 1 + 2(2 - x)$, равносильное уравнению $0 \cdot x = 0$, имеет корнем любое число.



1. Что называют уравнением; корнем уравнения?
2. Что означает требование *Решить уравнение*?
3. Какие уравнения называют равносильными?
4. Сформулируйте свойство уравнения о переносе слагаемого из одной части в другую. С какой целью делают такие переносы слагаемых?
5. Сформулируйте свойство уравнения об умножении или делении его частей на одно и то же число.
6. Каков общий порядок упрощения уравнения?
7. Какое уравнение называют линейным?
8. При каком условии уравнение $ax = b$ имеет один корень?
9. При каких условиях уравнение $ax = b$ не имеет корней?
10. При каких условиях уравнение $ax = b$ имеет корнем любое число?

159. Докажите, что каждое из чисел -5 , 0 , 3 является корнем уравнения:

- а) $z(z-3)(z+5)=0$; в) $a(a^2+2a-15)=0$;
б) $a^3+2a^2=15a$; г) $(2x^3+11x^2+5x)(x^2-9)=0$.

160. Решите уравнение:

- а) $x(x-2)(x-3)=0$; в) $(a-2)(a^2+2)=0$;
б) $2(y-3)(y+3)=0$; г) $(b-1)(b^2+5)(b+9)=0$.

161. Определите, равносильны ли уравнения:

- а) $a-4=6$ и $a-5=7$; д) $5(c-2)=30$ и $c-2=6$;
б) $a-4=6$ и $a-1=3$; е) $\frac{3d}{4}=6$ и $3d=24$;
в) $7+2b=0$ и $2b=-7$; ж) $\frac{3d}{4}=6$ и $3d=16$;
г) $7+2b=0$ и $2b+4=3$; з) $\frac{3d}{4}=6$ и $2d=16$.

162. Найдите корень уравнения:

- а) $9b=108$; д) $8c=-42$; и) $-21z=-14$;
б) $-6y=-132$; е) $12d=16$; к) $0j=0$;
в) $11k=\frac{1}{7}$; ж) $\frac{7}{18}g=\frac{14}{27}$; л) $\frac{50}{123}s=-1$;
г) $15b=\frac{5}{6}$; з) $\frac{7}{20}y=-1\frac{13}{15}$; м) $-\frac{25}{126}t=-1$.

163. Решите уравнение:

- а) $25y-1=9$; е) $5h=2\frac{4}{5}-2h$;
б) $7g+8=11$; ж) $7e+2\frac{2}{3}=3e$;
в) $3i-5=10-i$; з) $2\frac{1}{4}+5q=2q$;
г) $3p+6=10-p$; и) $3\frac{3}{5}-w=5w$;
д) $4j+4=j+5$; к) $7,5t-3,9t=18,05t$.

164. Решите уравнение:

- а) $2y-5+8y=9y+3-3y$;
б) $4z-21+3z-3=3z-5+7z-3$;

- в) $33 - 4a + 4 + 13a = 61 - 12a + 31 + 3a$;
 г) $-3b + 7 + 26b = 6 + b - 1 + 24b$;
 д) $14c + 4 - 18c + 10 = -15c + 37 + 10c - 3$;
 е) $3d - 31 + 6d + 36 - 6d + 25 = 30$.

165. Поделите обе части уравнения на одно и то же число и затем решите уравнение:

- а) $6(d + 1) = 18$; г) $13(5 - u) = 26$;
 б) $8(e - 5) = 32$; д) $(1 - j)19 = 57$;
 в) $7(4 - h) = 42$; е) $(5 - 2k)11 = 99$.

166. Решите уравнение:

- а) $b + 11 = 2b - 7$; е) $4,9 + 1,4p = 1,2 - 0,6p$;
 б) $f - 23 = 17 - 3f$; ж) $7,3i - 7,7 = 3,8i - 7$;
 в) $19 - 13h = 1 - 4h$; з) $a - 23 = \frac{2}{3}a - 17$;
 г) $0,8t - 2 = 2,3t + 2,5$; и) $2\frac{5}{6} - q = \frac{4}{7}q + \frac{5}{6}$;
 д) $1,17 - 1,7u = u + 1,17$; к) $3,5s + 6\frac{1}{3} = 4\frac{1}{6}s - 2\frac{5}{6}$;
 л) $7\frac{2}{3}d - 3\frac{1}{6} = 5\frac{3}{4} - 2\frac{3}{4}d$;
 м) $\frac{3}{7}m + 11\frac{3}{4} = -11\frac{1}{28} + \frac{1}{2}m$;
 н) $\frac{1}{12} - 3\frac{2}{9}j = 2\frac{8}{15} - \frac{1}{2}j$;
 о) $-0,7l - 1 = -3\frac{1}{3} - 0,2l + \frac{5}{6}$.

167. При каком значении переменной:

- а) сумма выражений $\frac{2-w}{5}$ и $\frac{3w+2}{7}$ равна нулю;
 б) разность выражений $\frac{48+5x}{12}$ и $\frac{2x+6}{15}$ равна 7;
 в) сумма выражений $\frac{2-y}{6}$ и $\frac{y+7}{15}$ равна выражению $\frac{8-y}{2}$;

- г) разность выражений $\frac{4z+18}{9}$ и $\frac{30-7z}{15}$ равна нулю;
- д) сумма выражений $\frac{2a-31}{9}$ и $\frac{36-5a}{16}$ равна -3 ;
- е) разность выражений $\frac{2b+1}{18}$ и $\frac{b+2}{9}$ равна выражению $\frac{b-6}{6}$?

168. Решите уравнение:

- а) $(21m - 19) - (1 + 4m) = 12m$;
- б) $(32 - 7n) + (64 + 17n) = 19 - (6n - 13)$;
- в) $2,4v - (v - 4,2) = -6,3 + (0,4v + 3,3)$;
- г) $(7,5 - 3,7c) - (7,1 - c) = (1,2c + 1,9) - (5,3 - 2c)$;
- д) $2\frac{5}{6} - \left(-1\frac{5}{8} + 2\frac{3}{7}x\right) = \left(2\frac{5}{12} + 1\frac{3}{14}x\right) - \left(-\frac{5}{24} - 2\frac{3}{21}x\right)$;
- е) $-\left(2\frac{7}{8}z + 3\frac{5}{6}\right) - \left(6\frac{7}{8} + 1\frac{5}{6}z\right) = -\left(-2\frac{2}{3} + 1\frac{1}{4}z\right) - \left(10\frac{7}{12} + 1\frac{11}{12}z\right)$.

169. Решите уравнение:

- а) $\frac{10g-9}{14} - \frac{3-4g}{7} = \frac{5g-9}{10} - \frac{5-6g}{5}$;
- б) $\frac{3x+2}{11} - \frac{4x-3}{3} = \frac{x+13}{4} - \frac{5x-3}{2}$;
- в) $\frac{5a+6}{3} + \frac{7a+11}{6} = \frac{6a-8}{7} - \frac{11a+2}{3}$;
- г) $\frac{3k-11}{4} + \frac{7k-10}{6} = \frac{11k-20}{8} + \frac{4k-13}{12}$.

170. Определите, при каком значении переменной:

- а) сумма выражений $\frac{3b+7}{4}$ и $\frac{7b+3}{8}$ равна -6 ;
- б) разность выражений $\frac{6l-9}{11}$ и $\frac{19-7l}{2}$ равна 18 ;

- в) значение выражения $\frac{2(x+2)}{5}$ на 1 больше значения выражения $\frac{3(x-1)}{7}$;
- г) значение выражения $\frac{3a+2}{8}$ в два раза больше значения выражения $\frac{2a-3}{2}$;
- д) значение выражения $\frac{11p+4}{9}$ на 5 меньше значения выражения $\frac{10-13p}{12}$;
- е) значение выражения $\frac{7-6q}{2}$ в два раза меньше значения выражения $\frac{5q+9,5}{3}$.

171. В уравнении неизвестное число обозначено буквой x . Определите, какое число обозначает буква a , учитывая, что число 1 является корнем уравнения:

- а) $x + 3 = a$; г) $3x - 4 = 2 + a$;
 б) $2(x - 1) = 2x + a$; д) $a - x + 2 = 2a$;
 в) $(6 - a) + 9x = 2a$; е) $ax + 5 = 7$.

172. Приведите дроби к общему знаменателю:

- а) $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}$; в) $\frac{1}{6}, \frac{5}{12}$; д) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$;
 б) $\frac{5}{6}, \frac{3}{4}$; г) $\frac{3}{8}, \frac{7}{12}$; е) $\frac{1}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{15}$.

173. Запишите хотя бы одно число, удовлетворяющее неравенству:

- а) $1,2 \leq d \leq 1,25$; г) $-\frac{1}{3} \leq r \leq -\frac{1}{2}$;
 б) $-1,25 \leq z \leq 1,2$; д) $-1,25 \leq d \leq -1,2$;
 в) $\frac{1}{2} \leq r \leq \frac{1}{3}$; е) $-\frac{1}{2} \leq r \leq -\frac{1}{3}$.

174. Упростите выражение:

- а) $5a + 8a$; в) $3m + 4 - 9m$; д) $2k + 3 - (6k - 2)$;
б) $5x - 8x$; г) $-5y - 2 - y$; е) $2 - 3z - (7 - 5z)$.

175. Докажите, что при любом значении переменной значение выражения:

- а) $7(4x - 5) - 14(2x + 1)$ равно -49 ;
б) $20(-7r - 7) + 35(4r + 17)$ равно 455 ;
в) $31(21t - 9) - 93(7t - 4)$ равно 93 .

176. Картина размерами $42 \text{ см} \times 35 \text{ см}$ вставлена в прямоугольную рамку шириной 5 см . Какой процент от площади картины и рамки занимает рамка?

177. Хозяйка $\frac{1}{6}$ поросенка продала по $88\,000 \text{ р.}$ за килограмм, $\frac{9}{16}$ поросенка — по $80\,000 \text{ р.}$, а остальные 26 кг — по $60\,000 \text{ р.}$ за килограмм. Сколько денег выручила хозяйка от продажи поросенка?

178. Автомобиль расходует в среднем на каждые 100 км пути при движении по шоссе $4,5 \text{ л}$ бензина, а в городе — 7 л . К концу дня из залитых в бак 40 л бензина осталось $6,8 \text{ л}$, а показания спидометра изменились с $24\,783 \text{ км}$ на $25\,443 \text{ км}$. Определите, какой путь за этот день автомобиль прошел по шоссе и какой — по городским улицам.

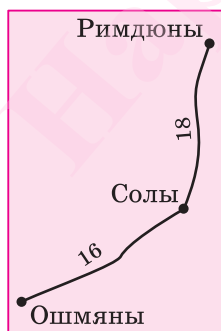


Рис. 141

179. Для изготовления бронзы сплавляли медь, олово и фосфор. Масса олова относится к массе фосфора как $9 : 1$, а к массе меди — как $27 : 220$. Сколько этих веществ в сплаве, если фосфора использовано на $21,7 \text{ ц}$ меньше, чем меди?

180. Из Римдюн в направлении Ошмян (рис. 141) вышел пешеход, а через 2 ч навстречу ему из Ошмян

выехал велосипедист, который через час встретил пешехода. Найдите их скорости, учитывая, что скорость пешехода на 12 км/ч меньше.

181. По Мозырскому району текут притоки Припяти — Тремля, Ипа, Неначь и Мытва. Длина Тремля меньше на 8 км общей длины Неначи и Мытвы и на 70 км общей длины Неначи и Ипы. Мытва на 6 км длиннее Неначи, а вместе с Ипой составляет 156 км. Найдите длины этих притоков Припяти.

182. Река Неначь вливает в Припять $1\,814\,400\text{ м}^3$ воды за неделю, а река Тремля — $2\,522\,880\text{ м}^3$ за декаду. Определите, сколько кубических метров воды в секунду вливает в Припять река Ипа, учитывая, что ее расход воды составляет 99,66 % от общего расхода воды Неначи и Тремля.

* * *

183. Найдите дату рождения белорусского писателя Максима Горьцкого, о которой известно следующее. Год рождения получится, если утроить то простое число седьмой сотни, разность простых соседей которого наибольшая. Число, когда родился писатель, совпадает с количеством прошедших столетий, а порядковый номер месяца в 9 раз меньше этого количества.

184. Костя купил 3 пакетика с орехами, а Иван — 2 таких пакетика. К ним присоединился Антон, и орехи были разделены поровну. Оказалось, что Антон должен заплатить друзьям 2500 р. Сколько из этих денег должен получить Костя и сколько Иван? Сколько стоит пакетик с орехами?

185. На одном острове живут два племени: мумба и юмба. Мумба всегда говорят правду, а юмба всегда лгут. Путешественник, приехавший на этот остров, нанял одного из туземцев-островитян в про-

водники и отправил его узнать, из какого племени встреченный ими островитянин. Проводник вернулся, и по его ответу путешественник понял, что проводник сам из племени юмба. Как он догадался?

6. Решение задач с помощью уравнений

А) Уравнения используют при решении текстовых задач. Для этого обозначают буквой одну из неизвестных величин. Через нее, используя условие задачи, выражают другие величины. Сравнив два выражения для одной и той же величины, полученные разными способами, составляют уравнение и решают его. Полученный результат сопоставляют с условиями задачи и формулируют ответ.

Задача 1. При увеличении населения городского поселка Радошковичи на 1,9 тыс. человек, или в $1\frac{1}{3}$ раза, получаются равные числа. Сколько тысяч человек проживают в Радошковичах?

Решение. Пусть в Радошковичах проживают x тыс. человек. Тогда первое указанное увеличение дает $(x + 1,9)$ тыс. человек, а второе — $1\frac{1}{3}x$ тыс. человек. По условию задачи числа $x + 1,9$ и $1\frac{1}{3}x$ равны. Поэтому должно быть истинным равенство

$$x + 1,9 = 1\frac{1}{3}x.$$

Решим полученное уравнение:

$$1,9 = 1\frac{1}{3}x - x;$$

$$\frac{1}{3}x = 1,9;$$

$$x = 1,9 \cdot 3;$$

$$x = 5,7.$$

Ответ. В Радошковичах проживают 5,7 тыс. человек.

Б) Задача 2. Девятиклассник Гена для своей сестры Зины, которая учится в 6-м классе, составил такую задачу: «Три мальчика нашли 22 гриба, причем второй мальчик нашел на 2 гриба больше, чем первый, и на 15 грибов больше, чем третий. Сколько грибов нашел второй мальчик?».

Зина решала задачу так. Пусть второй мальчик нашел k грибов. Тогда первый мальчик нашел $(k - 2)$ грибов, а третий — $(k - 15)$ грибов. Учитывая, что втроем они нашли 22 гриба, записываем уравнение:

$$k + (k - 2) + (k - 15) = 22.$$

Решим его:

$$k + k - 2 + k - 15 = 22;$$

$$3k = 39;$$

$$k = 13.$$

Можно будто бы ответить, что второй мальчик нашел 13 грибов. Но Зина решила проверить, выполняются ли все условия задачи. Пусть второй мальчик нашел 13 грибов. Тогда первый нашел $13 - 2 = 11$ грибов, а третий $13 - 15 = -2$ гриба. Но -2 гриба найти невозможно.

Отв е т. Такое распределение грибов у мальчиков невозможно.

Рассмотрение этой задачи показывает, что после решения уравнения нужно сделать проверку найденного корня по полному условию задачи для того, чтобы убедиться, что условия задачи не содержат противоречий.

В) Задача 3. Разность площадей водосборов Немана и Западной Двины составляет одиннадцатую долю площади водосбора Припяти, а площадь водосбора Припяти на 34 тыс. км² больше площади водосбора Западной Двины. Найдите площади водосборов Немана, Западной Двины и Припяти,

учитывая, что площади водосборов Немана и Западной Двины вместе составляют 185 тыс. км².

Решение. Пусть x тыс. км² есть площадь водосбора Западной Двины. Тогда площади водосборов Припяти и Немана равны соответственно $(x + 34)$ тыс. км² и $(185 - x)$ тыс. км², а разность площадей водосборов Немана и Западной Двины равна $(185 - x) - x$ тыс. км². По условию задачи эта разность составляет одиннадцатую долю от площади водосбора Припяти. Поэтому должно быть истинным равенство

$$(185 - x) - x = \frac{1}{11} (x + 34).$$

Решим полученное уравнение:

$$185 - x - x = \frac{1}{11} x + \frac{34}{11};$$

$$-x - x - \frac{1}{11} x = \frac{34}{11} - 185;$$

$$-\frac{23}{11} x = -\frac{2001}{11};$$

$$x = \left(-\frac{2001}{11}\right) : \left(-\frac{23}{11}\right);$$

$$x = 87.$$

Получили, что площадь водосбора Западной Двины равна 87 тыс. км². Теперь находим площадь водосбора Припяти: $87 + 34 = 121$ (тыс. км²) и Немана — $185 - 87 = 98$ (тыс. км²).

Отв е т. Площадь водосбора Немана равна 98 тыс. км², Западной Двины — 87 тыс. км², Припяти — 121 тыс. км².



1. Из каких этапов состоит решение текстовой задачи с помощью уравнения?
2. Как по условию задачи составляют уравнение?
3. Почему после решения составленного по условию задачи уравнения необходимо сопоставление результатов решения с условием задачи?

186. К $\frac{7}{15}$ неизвестного числа прибавили 119 и получили $\frac{3}{4}$ его. Найдите неизвестное число.

187. К задуманному числу прибавили число, равное ему, да еще $\frac{3}{7}$ его и получили 25,5. Найдите задуманное число.

188. Лена задумала число, прибавила к нему 5, затем сумму разделила на 3, к полученному частному прибавила 5 и получила задуманное число. Какое число задумала Лена?

189. Имеется четыре последовательных четных числа. Если из удвоенной суммы крайних чисел вычесть утроенную положительную разность средних чисел, то получится 22. Найдите эти числа.

190. Отцу 40 лет, а сыну 16. Через сколько лет отец будет в два раза старше сына?

191. На первом элеваторе было зерна в два раза больше, чем на втором. Из первого элеватора вывезли 750 т зерна, на второй привезли 350 т, после чего на обоих элеваторах зерна стало поровну. Сколько зерна было вначале на каждом элеваторе?

192. Лодка шла по течению реки 2,4 ч и против течения — 3,2 ч. Путь, пройденный лодкой по течению, оказался на 13,2 км короче пути, пройденного против течения. Найдите скорость лодки по озеру, если скорость течения реки равна 1,5 км/ч.

193. Разделите число 7800 на две части так, чтобы 40 % первой части были на 1712 больше 24 % второй.

194. Туристы на дорогу из одного населенного пункта в другой и на обратную дорогу затратили 9,5 ч. Туда они двигались со скоростью 5 км/ч, а назад — 4,5 км/ч. Найдите расстояние между населенными пунктами.

*Проба — количество долей
определенного металла
в 1000 долей вещества.*

Рис. 142

195. Имеется 150 г сплава 850-й пробы (рис. 142). Сколько нужно взять сплава 920-й пробы, чтобы при переплавке получился сплав 900-й пробы?

196. (Старинная задача.) Капитан на вопрос, сколько имеет в своей команде людей, ответил, что $\frac{2}{5}$ его команды на страже, $\frac{2}{7}$ — работают, $\frac{1}{4}$ — в лазарете да в наличии 27 человек. Сколько людей в команде?

197. Число единиц двузначного числа на 3 больше числа десятков. Если к этому числу прибавить 27, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите все такие числа.

198. Найдите такое число вида *77, что запись его цифр в обратном порядке дает число, меньшее на:

- а) 396; в) 720; д) 198;
б) 594; г) 0; е) 297.

199. Переднее колесо телеги (рис. 143) сделало на 25 оборотов больше, чем заднее. Определите, сколько оборотов сделало каждое колесо, учитывая, что окружность переднего колеса — 1,6 м, а заднего — 2 м.



Рис. 143

200. Найдите двузначное число, учитывая, что:

а) сумма его цифр равна 12, а частные от деления самого числа на 12 и обращенного на 21 равны (рис. 144);

б) сумма его цифр равна 11, а частное от деления самого числа на 14 составляет 80 % частного от деления обращенного числа на 13;

1307 — само число
7031 — обращенное число

Рис. 144

в) сумма его цифр равна 9, а частное от деления самого числа на 18 в четыре раза больше частного от деления обращенного числа на 27;

г) сумма его цифр равна 12, а частное от деления самого числа на 15 составляет $1\frac{2}{3}$ частного от деления обращенного числа на 19;

д) сумма его цифр равна 15, а частное от деления самого числа на 29 в два раза меньше частного от деления обращенного числа на 13.

201. Велосипедист выехал из Краснополя в Костюковичи (рис. 145) и ехал сначала со скоростью 18 км/ч, а затем, после 20-минутного отдыха, — со скоростью 16 км/ч. На каком расстоянии от Костюкович отдыхал велосипедист, если в дороге он был 3 ч 30 мин?

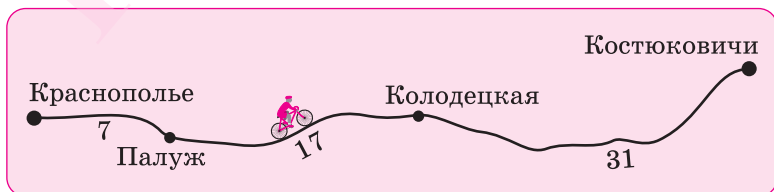


Рис. 145

202. Чтобы прочитать книгу к требуемому сроку, учащийся должен был ежедневно прочитывать по 50 страниц. На самом же деле учащийся читал по 65 страниц, и за два дня до конца срока ему оставалось прочитать 55 страниц. Сколько дней читал книгу учащийся и сколько страниц было прочитано?

203. На территории нашей страны растут три вида грибов рода *лекини* — грабовик, подосиновик, подберезовик. Диаметр шляпки подосиновика такой, что его четвертая доля равна третьей доле диаметра шляпки подберезовика, а его пятая доля — половине диаметра шляпки грабовика. Найдите диаметры шляпок этих грибов, учитывая, что сумма диаметров шляпок подосиновика и грабовика равна 28 см.

204. В Беларуси количество форм грабовика на 2 меньше количества форм подберезовика, в два раза меньше количества форм подосиновика, а вместе с количеством форм подосиновика дает количество форм подберезовика. Найдите количество форм подосиновика, подберезовика и грабовика.

205. Висла — самая большая река Польши, Сан и Нарев — ее притоки. По рисунку 146, на котором указаны связи между длинами этих рек, составьте задачу и решите ее.

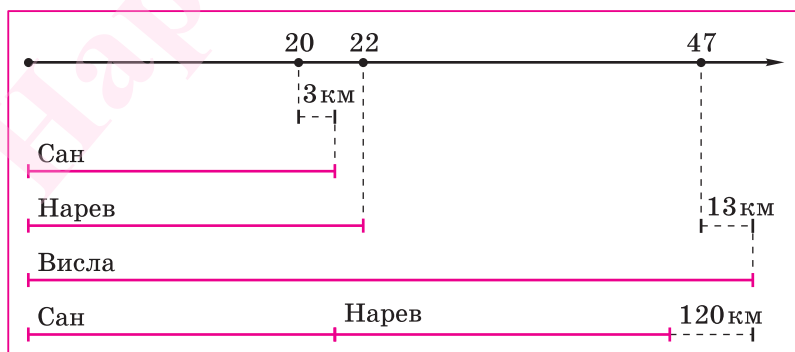


Рис. 146

206. Годовой сток Вислы таков, что он в 8,5 раза больше годового стока Сана и в 3,4 раза больше годового стока Нарева. Найдите годовые стоки этих рек, учитывая, что годовой сток Сана на 6 км^3 меньше годового стока Нарева.

207. Решите уравнение:

- а) $2,8 \cdot x = 0,56$; г) $-0,5 \cdot k = -1,2$;
 б) $2,5 \cdot y = -1,75$; д) $1,3 \cdot m + 18,2 = 0$;
 в) $-1,5 \cdot t = 10,5$; е) $-0,46 + 9,2 \cdot z = 0$.

208. Решите уравнение:

- а) $4(3m - 2) + 2(m - 6) = 5(2m - 8)$;
 б) $10(5 + 3n) - (11 + 2n) + 3n - 8 = 0$;
 в) $\frac{t-6}{3} - \frac{3t-2}{5} = \frac{t-25}{4}$;
 г) $\frac{2x-8}{5} + \frac{7-x}{6} = \frac{2x-16}{8}$.

209. Упростите выражение:

- а) $3(2s - 4) - 6s + 11$; г) $8,3g - 5,5 - (3,1 - 11g)$;
 б) $9,6 - 7,3d + (8d - 4,3)$; д) $-(2,9h - 4,9) + 10h - 9,3$;
 в) $6,7f + (7 - 5,1f) - 11,4$; е) $-(y - u) - 12 - (u - y)$.

210. Найдите значение выражения:

- а) $\left(\left(\left(\frac{5}{6} - \frac{3}{8} \right) \cdot \frac{8}{33} + \frac{1}{3} \right) : \left(6\frac{35}{84} + 8\frac{17}{56} - 12\frac{1}{8} \right) - \frac{11}{1635} \right) \cdot 36\frac{1}{3}$;
 б) $\frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{21} + \frac{15}{28} : \frac{5}{84}}{5 : \frac{1}{2} + 10} + \frac{2 : \frac{1}{2} + 3 : \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} : 2 + \frac{1}{3} : 3} \cdot \frac{1}{36} - 1\frac{16}{35}$;
 в) $\frac{8 : \left(3 : \left(2\frac{3}{4} - 1\frac{15}{28} \right) + \frac{2}{3} : \frac{3}{2} \right) + \frac{57}{223}}{14 \cdot \left(5\frac{5}{7} - 4\frac{3}{4} \right) - 9\frac{5}{7} + \frac{3}{13}}$;

$$\text{г) } \frac{\left(5\frac{1}{84} + \frac{31}{63} - \left(2\frac{31}{252} + 3\frac{5}{21}\right)\right) \cdot \left(24 : \left(1\frac{1}{2} : 4\frac{3}{8}\right)\right)}{\left(1\frac{15}{26} + \frac{1}{39} - \frac{7}{156}\right) : \left(20\frac{1}{4} : 26\right)};$$

$$\text{д) } \left(7\frac{332}{405} - 5\frac{890}{891} - \left(1\frac{488}{495} - \frac{98}{99}\right)\right) : \left(10 - 8\frac{151}{198}\right).$$

211. Запишите координаты вершин ломаной на рисунке 147.

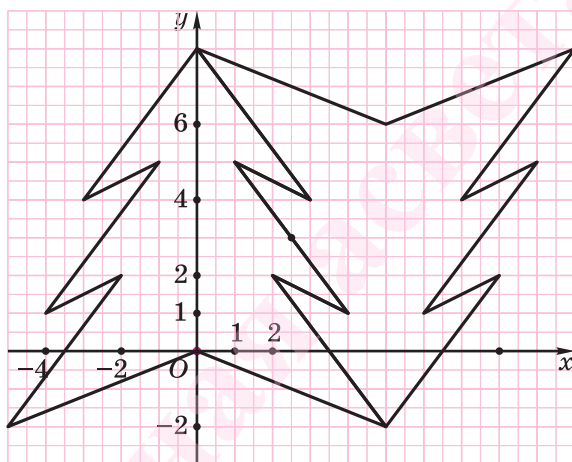


Рис. 147

212. Постройте треугольник по координатам его вершин $M(-1; 4)$, $K(-1; -2)$, $N(9; 4)$. Найдите координаты:

- точек A и B , в которых стороны MN и KM пересекают оси координат;
- точек C и D , в которых сторона KN пересекает оси координат.

Как можно записать координаты произвольной точки прямой KM ; прямой MN ?

213. Найдите углы треугольника, учитывая, что один из них на 37° меньше другого и составляет 60 % третьего.

214. Площадь одной из граней прямоугольного параллелепипеда относится к площади второй его грани как $5 : 3$ и на 45 см^2 меньше площади третьей грани. Учитывая, что то из измерений, которое принадлежит граням с самой малой и с самой большой площадями, равно 9 см , найдите:

- измерения параллелепипеда;
- площадь поверхности параллелепипеда;
- объем параллелепипеда.

215. Биссектрисы углов A и B треугольника ABC пересекаются в точке L , причем угол ALB равен 130° (рис. 148). Найдите углы треугольника ABC , учитывая, что угол CBL равен 34° .

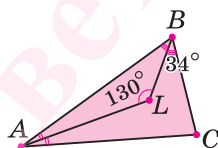


Рис. 148

216. Площади прямоугольников $ABCD$ и $BCEF$ с общей стороной BC относятся как $4 : 7$, а их разность составляет 3600 см^2 (рис. 149). Найдите измерения этих прямоугольников, учитывая, что их общая сторона равна 80 см .

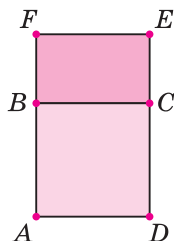


Рис. 149

* * *

217. Найдите год, в котором Слуцк получил магдебургское право, учитывая, что этот год есть произведение двух простых чисел, в записях которых четыре раза использована цифра 1, причем большее число на 10 больше квадрата меньшего числа.

218. Около каждой стороны 2009-угольника записали по числу так, что каждое из них равно полусумме двух соседних. Около каждой вершины записали разность чисел, стоящих около сторон, выхо-

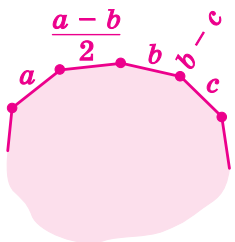


Рис. 150

дящих из этой вершины (рис. 150). Какие числа могут быть записаны около вершин?

219. Найдите значение выражения:

$$\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{18 \cdot 19} + \frac{1}{19 \cdot 20}.$$

7. Линейная функция

А) Рассмотрим несколько примеров зависимостей.

Пример 1. Масса пустой литровой пластиковой бутылки 30 г, а плотность подсолнечного масла 0,9 г/см³. Найдем зависимость массы m бутылки от объема V налитого в нее подсолнечного масла. Искомая масса m в граммах состоит из массы налитого подсолнечного масла, равной $0,9V$, и массы самой бутылки, равной 30 г. Значит,

$$m = 0,9V + 30.$$

Пример 2. Из Видзов в Браслав со скоростью 16 км/ч выехал велосипедист (рис. 151). Найдем зависимость пути s , который остается проехать велосипедисту, от времени t .

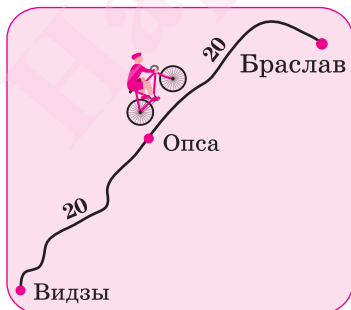


Рис. 151

Всего велосипедисту нужно проехать 40 км. За время t он проехал путь, равный $16t$. Поэтому ему остается проехать путь, равный $40 - 16t$. Значит, $s = 40 - 16t$, что можно записать и так:

$$s = -16t + 40.$$

Обе рассмотренные зависимости записаны формулами одного вида

$$y = ax + b,$$

где x — аргумент, a и b — некоторые числа.

Зависимость переменной y от переменной x , которую можно задать формулой вида $y = ax + b$, где a и b — некоторые числа, называется **линейной функцией**, а переменная x — *аргументом* линейной функции.

Если условия задачи никак не ограничивают аргумент линейной функции, то его значением может быть любое число. Условия задачи могут накладывать на аргумент дополнительные ограничения. Например, поскольку значение объема V подсолнечного масла может выражаться только числом из промежутка от 0 до 1000, то аргумент V функции $m = 0,9V + 30$ из примера 1 принимает числовые значения, удовлетворяющие условию $0 \leq V \leq 1000$.

Возможные значения аргумента функции $s = -16t + 40$ найдем, исходя из того, что если велосипедист доедет до Браслава, то путь s , который ему остается проехать, станет равным нулю: $0 = -16t + 40$. Решим полученное уравнение:

$$0 = -16t + 40;$$

$$16t = 40;$$

$$t = 2,5.$$

Значит, значения аргумента рассматриваемой функции являются числами, удовлетворяющими двойному неравенству $0 \leq t \leq 2,5$.

Б) Пример 3. Рассмотрим функцию $y = 2x - 1$. Для построения ее графика составим таблицу соответствующих значений переменных x и y .

x	-5	-3	-2	-1	0	1	2	3	5
y	-11	-7	-5	-3	-1	1	3	5	9

Отметив на координатной плоскости точки, координаты которых указаны в таблице, получим рисунок 152. Можно заметить, что все отмеченные точки лежат на одной прямой. Эта прямая показана на рисунке 153, она является графиком линейной функции $y = 2x - 1$.

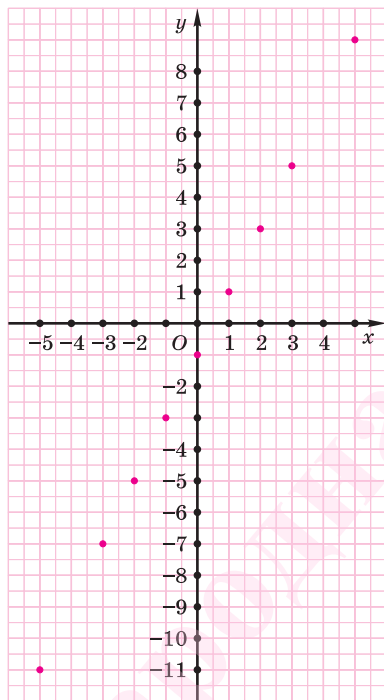


Рис. 152

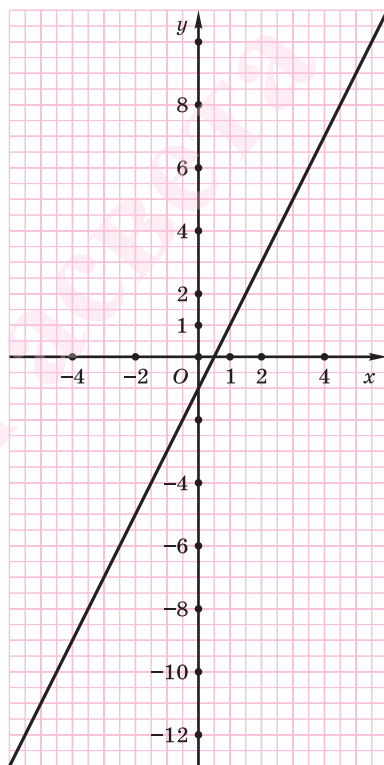


Рис. 153

Графиком линейной функции является прямая.

Мы знаем, что прямая определяется своими двумя точками. Поэтому для построения графика линейной функции достаточно найти координаты двух точек графика, нанести эти точки на координатную плоскость и через них провести прямую.

Пример 4. Построим график функции $z = -\frac{1}{3}t - 3$.

Поскольку это линейная функция, то для построения ее графика найдем координаты двух точек графика:

$$\text{если } t = -3, \text{ то } z = -\frac{1}{3} \cdot (-3) - 3 = -2;$$

$$\text{если } t = 3, \text{ то } z = -\frac{1}{3} \cdot 3 - 3 = -4.$$

Отметив на координатной плоскости точки $M(-3; -2)$ и $N(3; -4)$, проводим через них прямую MN (рис. 154), которая является графиком функции $z = -\frac{1}{3}t - 3$.

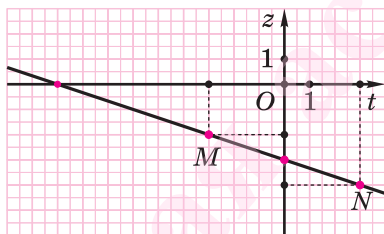


Рис. 154

Заметим, что при построении графика линейной функции удобно в качестве одной из точек брать точку с абсциссой 0. Если бы взяли $t = 0$, то получили бы $z = -3$.

В) Пусть в формуле $y = ax + b$ число a равно нулю. Тогда формульное выражение линейной функции получает вид $y = 0 \cdot x + b$, т. е. $y = b$. Линейная функция, которая задается формулой $y = b$, при любом значении аргумента принимает одно и то же значение b .

Пример 5. Построим график функции $s = 4$, т. е. $s = 0u + 4$. При любом значении переменной u переменная s принимает значение, равное 4, т. е. графику функции принадлежат, например, точки $R(0; 4)$ и $T(3; 4)$ с одной и той же ординатой 4. Прямая

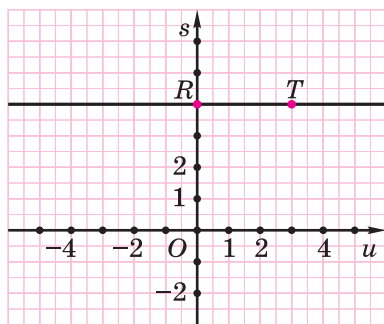


Рис. 155

RT является графиком линейной функции $s = 4$ (рис. 155).

Пусть в формуле $y = ax + b$ число b равно нулю. Тогда формульное выражение линейной функции становится таким:

$$y = ax.$$

Функция, которую можно задать формулой $y = ax$, где x — аргумент, a — некоторое не равное нулю число, называется **прямой пропорциональностью**.

Поскольку прямая пропорциональность является частным случаем линейной функции, то графиком прямой пропорциональности является прямая линия. Эта прямая проходит через начало координат, так как при $x = 0$ значение y равно 0.

Графиком прямой пропорциональности является прямая, проходящая через начало координат.

Рассмотрим вопрос о взаимном расположении на координатной плоскости графиков линейной функции $y = ax + b$ и прямой пропорциональности $y = ax$.

Сначала отметим, что координатные оси разделяют координатную плоскость на четыре части, которые называют **координатными углами** или **координатными четвертями** (рис. 156). **Первая координатная четверть** — это часть координатной плоскости, в которой абсцисса и ордината точек положительны, **вторая координатная четверть** — часть координатной плоскости, в которой абсцисса точки отрицательна, а ордината положительна, **третья координатная четверть** — часть координатной плоскости, в которой абсцисса и ордината точки отрицательны,

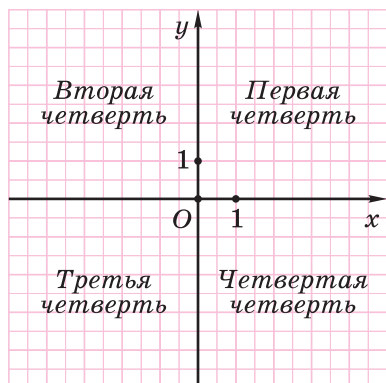


Рис. 156

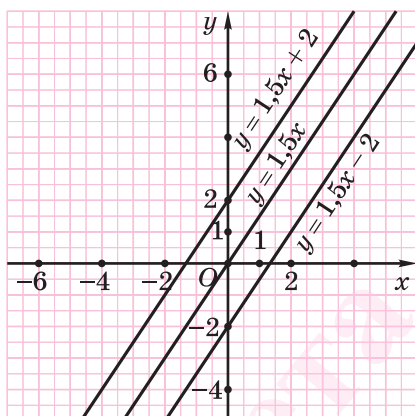


Рис. 157

четвертая координатная четверть — часть координатной плоскости, в которой абсцисса положительна, а ордината отрицательна.

Пример 6. Построим в одной системе координат графики функций $y = 1,5x$, $y = 1,5x + 2$ и $y = 1,5x - 2$ (рис. 157). Можно заметить, что из графика функции $y = 1,5x$ получается график функции $y = 1,5x + 2$ сдвигом на 2 единицы вдоль оси ординат в положительном направлении, а график функции $y = 1,5x - 2$ — сдвигом на 2 единицы вдоль оси ординат в отрицательном направлении.

Теорема 1. *График линейной функции $y = ax + b$ получается из графика прямой пропорциональности $y = ax$ сдвигом вдоль оси ординат на b единиц в положительном или отрицательном направлении в зависимости от того, каким — положительным или отрицательным — является число b .*

Доказательство. Пусть есть линейная функция $y = ax + b$ и прямая пропорциональность $y = ax$. Пусть x_0 — произвольное значение аргумента x . Найдем разность значений линейной функции и

прямой пропорциональности при этом значении аргумента:

$$(ax_0 + b) - ax_0 = b.$$

Получаем, что при любом значении аргумента значение линейной функции $y = ax + b$ и прямой пропорциональности $y = ax$ отличаются на число b . Другими словами, значение $ax_0 + b$ линейной функции $y = ax + b$ при $x = x_0$ получается из значения ax_0 прямой пропорциональности $y = ax$ при этом значении аргумента прибавлением числа b . Это приводит к сдвигу вдоль оси ординат на $|b|$ единиц в положительном направлении, если число b положительно (рис. 158), и в отрицательном направлении, если число b отрицательно (рис. 159).

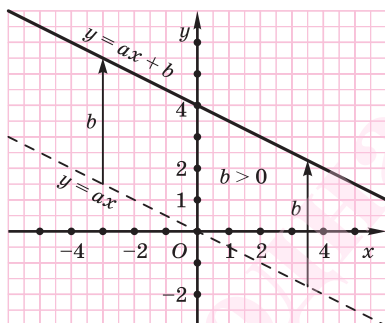


Рис. 158

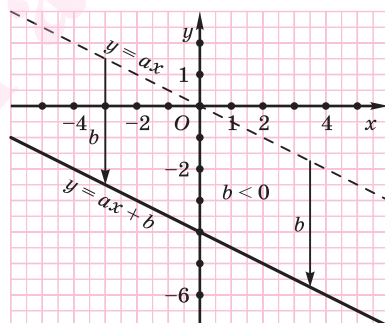


Рис. 159

Г) Наконец, рассмотрим вопрос о взаимном расположении графиков линейных функций. Прямые, являющиеся графиками двух линейных функций, либо пересекаются, либо параллельны.

Пример 7. Рассмотрим графики линейных функций $y = x + 2$ и $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$ с разными коэффициентами при аргументе x (рис. 160). Пересечение графиков функций означает, что эти графики имеют общую точку. Иными словами, есть такое значение

переменной x , что значения переменной y для каждой из функций $y = x + 2$ и $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$ одинаковы. Чтобы найти это значение x , нужно решить уравнение $x + 2 = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$. Сделаем это:

$$x + 2 = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3};$$

$$3x + 6 = 2x - 5; x = -11.$$

Найдем значение каждой из функций при значении x , равном -11 :

$$-11 + 2 = -9; \frac{2}{3}(-11) - \frac{5}{3} = -\frac{22}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{27}{3} = -9.$$

При $x = -11$ обе функции $y = x + 2$ и $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$ принимают значение, равное -9 . Точка $(-11; -9)$ — единственная общая точка обоих графиков. Это означает, что прямые, являющиеся графиками функций $y = x + 2$ и $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$, пересекаются.

Пример 8. Рассмотрим графики линейных функций $y = 0,6x + 4$ и $y = 0,6x - 3$ с одинаковыми коэффициентами при аргументе x (рис. 161). Выясним, пересекаются

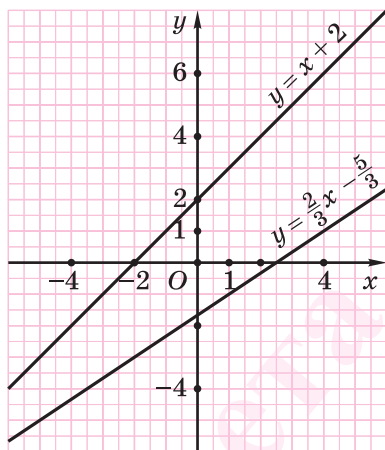


Рис. 160

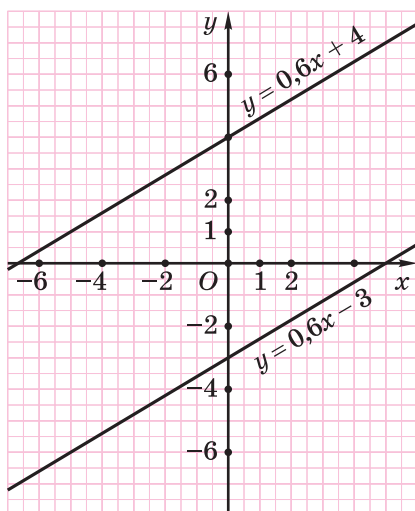


Рис. 161

ли они. Для этого решим уравнение $0,6x + 4 = 0,6x - 3$:

$$\begin{aligned}0,6x + 4 &= 0,6x - 3; \\ 0 \cdot x &= -7;\end{aligned}$$

корней нет.

Поскольку уравнение не имеет корней, то прямые, являющиеся графиками линейных функций $y = 0,6x + 4$ и $y = 0,6x - 3$, не имеют общих точек, а это означает, что рассматриваемые графики параллельны.

Теорема 2. Графики двух различных линейных функций, заданных формулами вида $y = ax + b$:

- а) пересекаются, если коэффициенты a различны;*
- б) параллельны, если коэффициенты a одинаковы.*

Доказательство. Пусть $y = a_1x + b_1$ и $y = a_2x + b_2$ — две разные линейные функции. Выясним, как расположены графики записанных функций на координатной плоскости. Для этого нужно решить уравнение $a_1x + b_1 = a_2x + b_2$. Получим:

$$\begin{aligned}a_1x + b_1 &= a_2x + b_2; \\ a_1x - a_2x &= b_2 - b_1; \\ (a_1 - a_2)x &= b_2 - b_1.\end{aligned}$$

Пусть коэффициенты a_1 и a_2 различны. Тогда $a_1 - a_2 \neq 0$. Значит, уравнение имеет единственный корень. Это означает, что графики функций пересекаются.

Пусть коэффициенты a_1 и a_2 одинаковы, а b_1 и b_2 — различны. Тогда $a_1 - a_2 = 0$ и $b_2 - b_1 \neq 0$. В этом случае уравнение не имеет корней. А это означает, что графики функций параллельны.

На рисунке 162 показаны графики линейных функций, заданных уравнениями вида $y = ax + b$, с одинаковыми значениями a и различными значе-

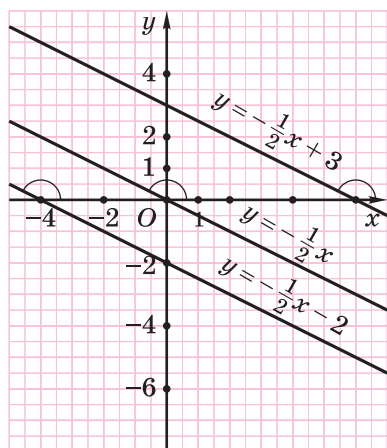


Рис. 162

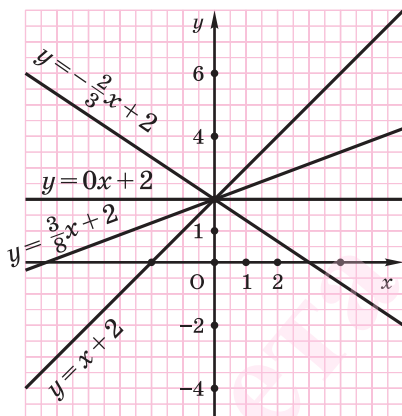


Рис. 163

ниями b . Эти прямые параллельны друг другу и образуют с осью абсцисс равные углы. Величина этих углов зависит от коэффициента a . Число a называют *угловым коэффициентом прямой*, являющейся графиком функции $y = ax + b$.

Если $x = 0$, то линейная функция $y = ax + b$ принимает значение, равное b . Это означает, что график функции $y = ax + b$ пересекает ось ординат в точке $(0; b)$. На рисунке 163 показаны графики линейных функций с различными значениями a и одним и тем же значением b . Все эти прямые пересекаются в одной точке, расположенной на оси ординат.



1. Какая функция называется линейной?
2. Какая линия является графиком линейной функции?
3. Как построить график линейной функции?
4. Какая линейная функция называется прямой пропорциональностью?
5. Какая линия является графиком прямой пропорциональности?
6. Какую часть координатной плоскости называют первой координатной четвертью; второй координатной четвертью; третьей координатной четвертью; четвертой координатной четвертью?

7. Как в координатной плоскости расположен график функции $y = ax$ при положительном значении коэффициента a ; при отрицательном значении коэффициента a ?
8. При каком условии графики линейных функций пересекаются; параллельны?
9. Как найти координаты точки пересечения графиков линейных функций?
10. Какое число называют угловым коэффициентом прямой, являющейся графиком линейной функции?
11. Что показывает коэффициент b в формуле $y = ax + b$, задающей линейную функцию?

220. Определите, является ли линейной функцией зависимость, заданная формулой:

- а) $y = 3x - 5$; г) $S = \pi r^2$; ж) $h = -\frac{4t - 1}{5}$;
 б) $C = 2\pi R$; д) $y = t^2 + 5$; з) $V = (2 + b) \cdot 7$;
 в) $g = -3,5l$; е) $P = 9,81m$; и) $s = (m + 2)(m - 3)$.

221. В бассейн вместимостью 600 м^3 каждую минуту вливается $0,4 \text{ м}^3$ воды. Запишите формулу, выражающую зависимость объема V незаполненной части бассейна от времени t . Определите, является ли эта функция линейной.

222. Одно измерение прямоугольника a м, а другое — на 5 м меньше. Запишите формулу, выражающую зависимость от измерения a периметра прямоугольника, и формулу, выражающую зависимость от этого измерения площади прямоугольника. Какая из двух записанных зависимостей является линейной функцией?

223. Определите, является ли прямой пропорциональностью зависимость, заданная формулой:

- а) $y = x$; в) $z = -t$; д) $A = \frac{f}{7}$; ж) $T = \frac{c - 3}{3}$;
 б) $s = -2k$; г) $S = a^2$; е) $V = x^3$; з) $D = \frac{C}{\pi}$.

224. Прямая пропорциональность задана формулой $y = -\frac{x}{12}$. Заполните таблицу.

x	-12	-4	-2	$-\frac{2}{3}$	0	6	12	24				
y									-1	-4	$\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{3}$

225. Постройте график линейной функции $p = 4b$. По графику найдите:

- а) значение p , соответствующее значению b , равному 6;
- б) при каком значении аргумента b значение функции p равно 6.

Существует ли такое значение переменной b , при котором значение p равно -400 ? Если существует, то найдите его.

226. Постройте график прямой пропорциональности, заданной формулой:

- а) $x = -2s$; в) $T = -l$;
- б) $h = 1,5x$; г) $b = 0,5a$.

227. На рисунке 164 приведены графики движения пешехода и велосипедиста. Определите:

- а) сколько времени был в дороге велосипедист; пешеход;
- б) какой путь преодолел велосипедист; пешеход;
- в) с какой скоростью двигался велосипедист; пешеход;
- г) сколько процентов составляет путь, проделанный велосипедистом, от пути, пройденного пешеходом;

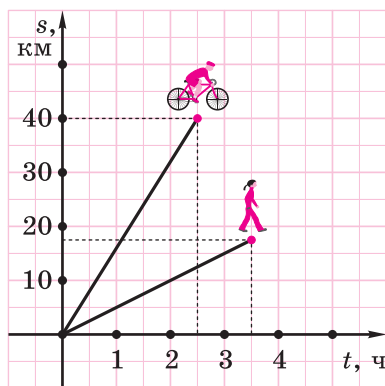


Рис. 164

путь, пройденный пешеходом, от пути, проделанного велосипедистом.

Запишите формулы, выражающие зависимости путей, проделанных велосипедистом и пешеходом, от времени движения.

228. Скажите, в каких координатных четвертях находится график функции:

- а) $y = 0,0047x$; г) $V = 100\,047u$;
 б) $p = -\frac{13}{131\,417}b$; д) $y = ax$, где $a > 0$;
 в) $S = -678\,947l$; е) $y = ax$, где $a < 0$.

229. Запишите формулу, выражающую прямую пропорциональность, график которой проходит через точку:

- а) $A(1; 3)$; г) $D(-1; -3)$;
 б) $B(3; 1)$; д) $E(4; 6)$;
 в) $C(1; -3)$; е) $F(-6; 2)$.

230. Запишите формулу, выражающую прямую пропорциональность, график которой изображен на рисунке:

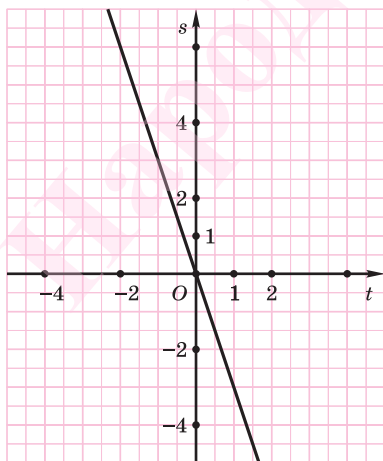


Рис. 165

- а) 165; в) 167;
 б) 166; г) 168.

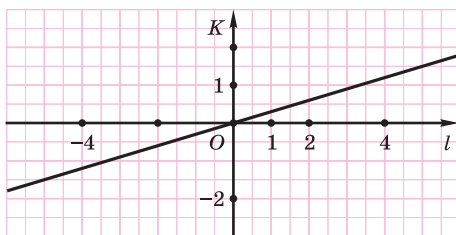


Рис. 166

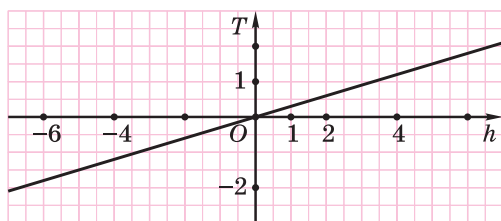


Рис. 167

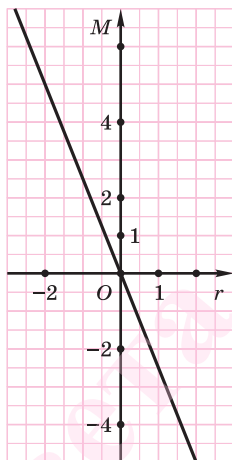


Рис. 168

231. Определите, проходит ли график функции $z = 1,4y - 13$ через точку:

- а) $A(10; 1)$; в) $C(-100; 123)$;
б) $B(-10; -27)$; г) $D(500; 687)$.

232. Линейная функция задана формулой $S = 7 - \frac{1}{3}h$. Найдите значение этой функции при значении h , равном:

- а) 3; в) 0,3; д) $-\frac{2}{3}$; ж) $\frac{9}{13}$;
б) -3; г) $\frac{2}{3}$; е) -6; з) $2\frac{4}{7}$.

233. Линейная функция задана формулой $S = 7 - \frac{1}{3}h$. Найдите значение аргумента h , если значение S функции равно:

- а) 6; в) 6,9; д) $7\frac{2}{9}$; ж) $6\frac{10}{13}$;
б) 8; г) $6\frac{7}{9}$; е) 9; з) $6\frac{1}{7}$.

234. Линейная функция задана формулой $v = 60 + 2,5t$. Заполните таблицу.

t	-4	-1,8	0	$\frac{2}{5}$				
v					40	60	80	90

235. Постройте график функции, заданной формулой:

а) $s = 4t + 2$; г) $k = -s + 3,5$; ж) $x = \frac{2}{3}t - 1$;

б) $y = -2x - 1$; д) $S = \frac{1}{2}h - 3$; з) $Z = \frac{y+3}{2}$;

в) $a = 0,2l + 4$; е) $p = -a - 4,5$; и) $m = -3h$.

236. Определите, в каких координатных четвертях расположен график линейной функции:

а) $K = 0,2t - 21$; б) $a = -\frac{1}{2}l + 13$.

237. Определите знаки коэффициентов a и b в формулах вида $g = ay + b$, задающих прямые, на которых лежат стороны четырехугольника $ABCD$ (рис. 169).

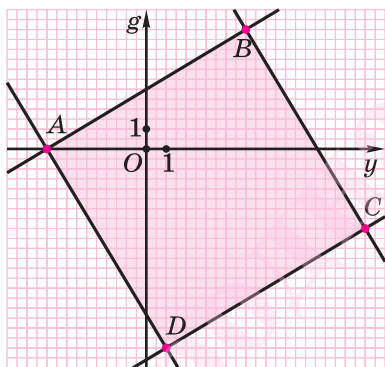


Рис. 169

238. Постройте график функции $y = -2n + 3$. Запишите координаты точек C и D пересечения графика с осями абсцисс и ординат соответственно. При каких значениях аргумента значения функции:

- а) положительны;
- б) отрицательны;
- в) неположительны;
- г) неотрицательны?

239. При каких значениях аргумента значения функции $K = 4c - 5$:

- а) положительны; в) неположительны;
- б) отрицательны; г) неотрицательны?

240. Без построений найдите координаты точек R и S пересечения с осями абсцисс и ординат соответственно графика функции:

- а) $y = 4x - 8$; в) $R = 0,4s + 18$;
 б) $z = -y + 12$; г) $F = \frac{2}{3}m - 11$.

241. Постройте график функции $s = 16 - 4r$. По графику определите, при каких значениях аргумента значения функции:

- а) больше -4 ; в) меньше 6 ;
 б) не больше 12 ; г) не меньше -6 .

242. Постройте график функции $z = 2m - 3$. Запишите координаты точек A и B пересечения графика с осями абсцисс и ординат соответственно. По графику определите, при каких значениях аргумента значения функции:

- а) больше 1 и меньше 6 ;
 б) не больше 5 и не меньше -3 ;
 в) меньше 1 и не меньше -1 ;
 г) больше -9 и не больше -2 .

243. На одной координатной плоскости постройте графики функций: $y = 0x + 6$; $y = 6$; $y = -4$; $y = -1,2$; $y = 3,8$.

244. Запишите формулу, выражающую линейную функцию, график которой проходит через точки:

- а) $A(0; 2)$ и $B(3; 0)$; в) $E(0; -4)$ и $F(-2; 0)$;
 б) $C(0; 4)$ и $D(2; 0)$; г) $M(0; m)$ и $N(n; 0)$.

245. Постройте график зависимости, заданной уравнением:

- а) $2x - y = 1$; б) $2t - 2y = 4$; в) $2u - 6y = 12$.

246. Определите, пересекаются или параллельны прямые, заданные формулами:

- а) $y = 6x + 3$ и $y = 6x - 8$; г) $k = -6l - 7$ и $k = -6l$;
 б) $z = 7u - 4$ и $z = -7u - 7$; д) $g = 4h + 1$ и $g = -3h + 1$;
 в) $s = 3t - 5$ и $s = -6t + 2$; е) $V = 17a$ и $V = -8a$.

247. Для линейной функции $p = 4c$ запишите какую-либо функцию, график которой:

- а) параллелен графику этой функции;
- б) пересекает график этой функции.

248. Найдите координаты точки пересечения графиков функций:

- а) $s = 8u - 5$ и $s = -3u + 6$;
- б) $y = 8 - 3,3t$ и $y = -7,3t + 12$;
- в) $z = 30x - 40$ и $z = 70x + 120$;
- г) $f = 39l + 7$ и $f = 27l - 17$;
- д) $V = 21h$ и $V = -8h + 5,6$;
- е) $S = -9k + 13$ и $S = -14$.

249. Найдите, если возможно, координаты точки пересечения графиков функций:

- а) $T = -6u - 9$ и $T = 2u + 7$;
- б) $y = -0,3x - 2$ и $y = 7,3x - 10$;
- в) $R = 0,2s - 4$ и $R = \frac{1}{5}s + 2$;
- г) $z = l$ и $z = 7l - 18$;
- д) $p = 2,1h$ и $p = 2,1h + 11$;
- е) $C = 4 - 9k$ и $C = -23$.

250. В одной системе координат постройте графики функций:

- а) $s = t - 5$; $s = -t - 2,5$; $s = -t$; $s = -2,5$; $s = t + 2,5$;
- б) $u = x - 1,5$; $u = -x + 1,5$; $u = -1,5x$; $u = 1,5$;
 $u = 1,5x + 1,5$.

251. Запишите линейную функцию, график которой пересекает ось ординат в той же точке, что и график функции:

- а) $y = x + 6$; б) $z = -15x - 5$; в) $F = 1,6a - 8$.

252. Определите, в каких координатных четвертях расположен график прямой пропорциональ-

ности, если он параллелен графику линейной функции:

а) $K = 0,2t - 21$; б) $a = -\frac{1}{2}l + 13$.

253. Имеется равнобедренный треугольник. Найдите его:

- а) стороны, учитывая, что периметр треугольника равен 35 см, а одна сторона больше другой на 7 см;
б) углы, учитывая, что один из них на 36° меньше другого.

254. Постройте треугольник по стороне ST и прилежащим к ней углам S и T , если:

- а) $ST = 65$ мм; $\angle S = 70^\circ$; $\angle T = 65^\circ$;
б) $ST = 120$ мм; $\angle S = 15^\circ$; $\angle T = 67^\circ$;
в) $ST = 26$ мм; $\angle S = 70^\circ$; $\angle T = 100^\circ$.

255. На изготовление новой модели станка пошло 14,7 ц металла, что на 30 % меньше по сравнению с предыдущей моделью. Каковы были затраты металла на прежнюю модель станка?

256. За контрольную работу 7 учащихся получили отличные отметки (8, 9 или 10). Сколько учащихся в классе, если учащиеся, получившие отличные отметки, составляют 25 % от остальных учащихся класса?

257. Два теплохода вышли одновременно из одного пункта и идут в одном направлении. Первый теплоход за каждые 1,5 ч проходит 37,5 км, а второй за каждые 2 ч — 45 км. Через какое время первый теплоход будет находиться на расстоянии 10 км от второго?

258. Калужница болотная, прострел широколистный, ветреница лесная, перелеска благородная — многолетние травянистые растения семейства лютиковых. Высота, на которую может вырастать калужница, такова, что она составляет 2,4 высоты

прострела, 4 высоты перелески, а уменьшенная на 5 см составляет общую высоту ветреницы и перелески. Найдите наибольшие высоты этих растений, учитывая, что общая высота прострела и перелески составляет высоту ветреницы.

259. На рисунке 170 показаны соотношения между самыми малыми высотами, на которые вырастают калужница, прострел, ветреница и перелеска. Составьте задачу и решите ее.

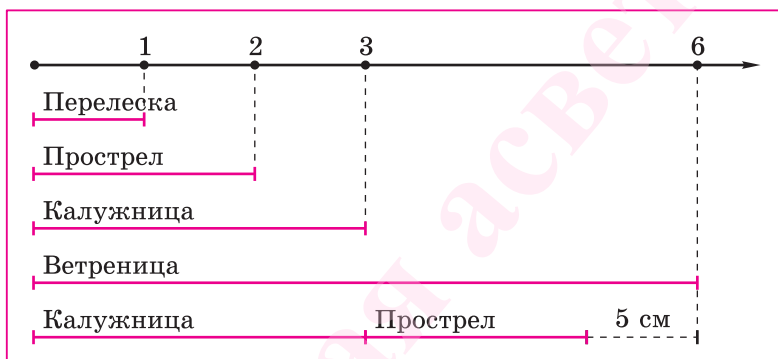


Рис. 170

* * *

260. Какое наименьшее количество множителей произведения всех натуральных чисел от 1 до 24 нужно зачеркнуть, чтобы произведение оставшихся чисел было точным кубом?

261. От прямоугольника размерами 5×8 клеток отрезали угловой квадрат со стороной в 2 клетки. Как разрезать полученный пятиугольник на две части, из которых можно сложить квадрат?

262. На доске записаны все натуральные числа от 1 до 2009. Вытираются два произвольно выбранных числа и записывается их разность. Если повторить эти действия достаточное количество раз, то на доске останется одно число. Может ли оно быть нулем?

8. Равные фигуры

А) Равные фигуры — это такие фигуры, которые совмещаются при наложении.

Отрезки одинаковой длины равны (рис. 171). Углы с одной и той же градусной мерой также равны (рис. 172).

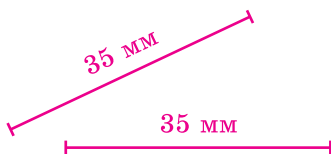


Рис. 171

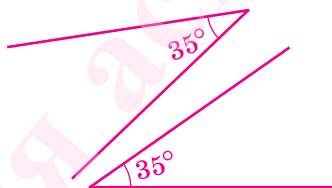


Рис. 172

Два учащихся по заданию учителя начертили на доске окружности с радиусами 20 см: одну — с центром A , другую — с центром B (рис. 173). Если наложить одну из окружностей на другую так, чтобы

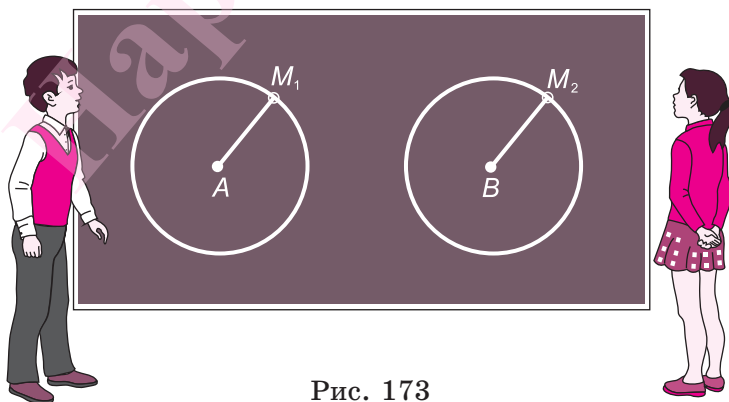


Рис. 173

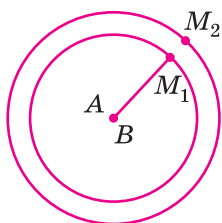


Рис. 174

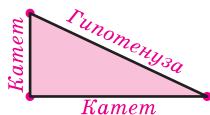


Рис. 175

их центры совместились, то совпадут и сами окружности, так как в противном случае они имели бы разные радиусы (рис. 174). Таким образом, *окружности с равными радиусами равны*.

Понятно, что и *круги с равными радиусами равны*.

Из этого следует, что для задания окружности или круга достаточно указать их радиус.

Вы знаете, что *прямоугольным треугольником* называют треугольник, у которого имеется прямой угол (рис. 175). Сторону прямоугольного треугольника, лежащую против прямого угла, называют *гипотенузой*, а две другие — *катетами* прямоугольного треугольника.

Б) Учащиеся построили прямоугольные треугольники ABC и PQR с катетами 45 см и 20 см (рис. 176). Можно предположить, что полученные треугольники будут равными.

Чтобы убедиться в этом, наложим треугольник PQR на треугольник ABC так, чтобы их прямые углы R и C совпали: это возможно, так как

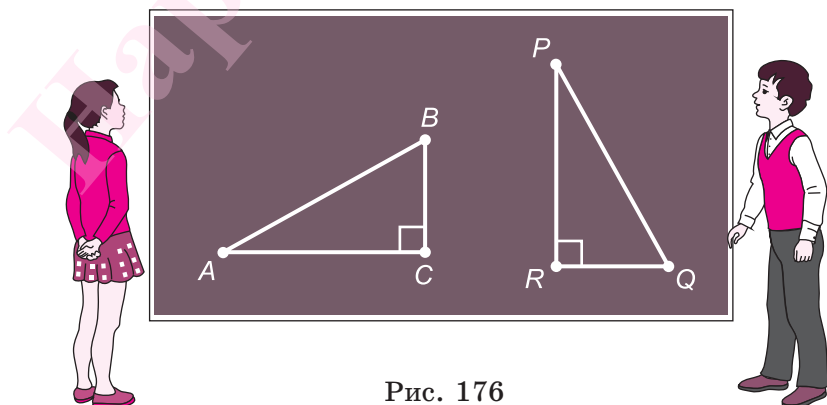


Рис. 176

все прямые углы равны. Проследим также, чтобы больший катет RP пошел по большему катету CA , а меньший катет RQ — по меньшему катету CB (рис. 177). Тогда катет RP точно наложится на катет CA , так как они имеют равные длины, а значит, точки P и A совпадут. Также по причине равенства катетов RQ и CB совпадут точки Q и B . Значит, треугольники PQR и ABC совпадут полностью. Поэтому они равны.

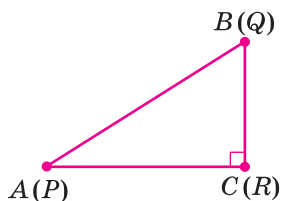


Рис. 177

Таким образом, мы установили **признак равенства прямоугольных треугольников**:

если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого, то такие прямоугольные треугольники равны.

В соответствии с доказанным признаком для задания прямоугольного треугольника достаточно задать его катеты.

В) Задача. Построим треугольник ABC , у которого известны две стороны и угол между ними: $AB = 47$ см, $AC = 35$ см, $\angle A = 72^\circ$.

Строим угол KAL , равный 72° . На одной из его сторон находим точку B , отстоящую от точки A на 47 см, а на другой — точку C , отстоящую от точки A на 35 см (рис. 178). Соединяем точки B и C . Треугольник ABC — искомый.

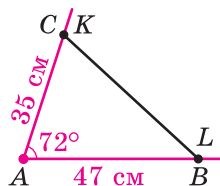


Рис. 178

Пусть по этим сведениям построен и треугольник PQR , у которого $PQ = 47$ см, $PR = 35$ см и $\angle P = 72^\circ$ (рис. 179). Докажем, что треугольники ABC и PQR равны.

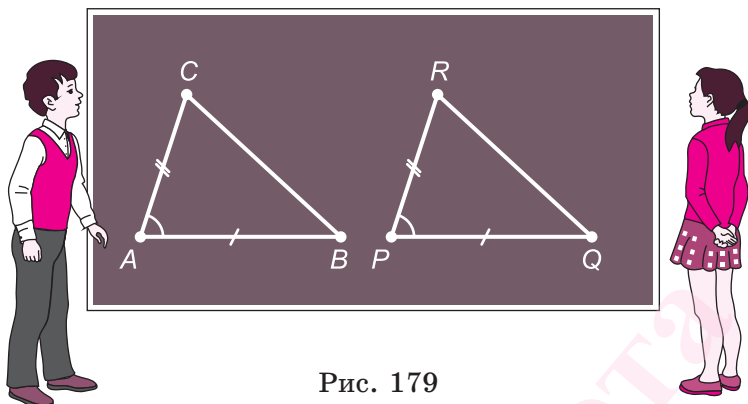


Рис. 179

Наложим треугольник PQR на треугольник ABC так, чтобы совпали их равные углы P и A (рис. 180). Поскольку отрезки PQ и AB равны, то точка Q наложится на точку B , а поскольку отрезки PR и AC равны, то точка R наложится на точку C .

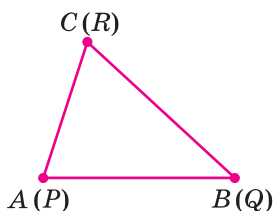


Рис. 180

В результате при наложении все вершины треугольника PQR совместятся с вершинами треугольника ABC . Треугольники PQR и ABC полностью совпали. Значит, они равны.

Если длины сторон треугольника и градусную меру угла взять другими, то рассуждения от этого не изменятся. Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Из этого следует, что для задания треугольника достаточно задать две его стороны и угол, лежащий между ними.

- ?** 1. Какие фигуры называются равными?
2. Почему для задания окружности достаточно указать ее радиус?

3. Какой треугольник называют прямоугольным?
4. Как называют стороны прямоугольного треугольника?
5. Сформулируйте признак равенства прямоугольных треугольников по катетам.
6. Как построить треугольник по двум его сторонам и углу между ними?
7. Сформулируйте признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними.

263. Будут ли:

- а) равными прямоугольные треугольники, у которых катеты соответственно равны;
- б) соответственно равными катеты в равных прямоугольных треугольниках;
- в) равными прямоугольники, у которых измерения одинаковы;
- г) одинаковыми измерения в равных прямоугольниках?

264. Используя рисунок 181, назовите:

- а) остроугольные треугольники;
- б) тупоугольные треугольники;
- в) прямоугольные треугольники;
- г) гипотенузы прямоугольных треугольников;
- д) катеты прямоугольных треугольников.

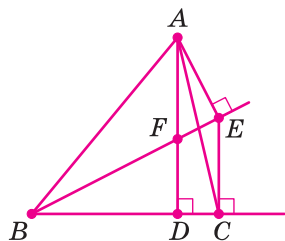


Рис. 181

265. Постройте:

- а) отрезок длиной 43 мм;
- б) угол с градусной мерой в 67° ;
- в) прямой угол;
- г) окружность с радиусом 45 мм;
- д) круг с радиусом 32 мм;
- е) прямоугольный треугольник с катетами 56 мм и 71 мм;
- ж) прямоугольник с измерениями 35 мм и 69 мм;
- з) квадрат со стороной 38 мм.

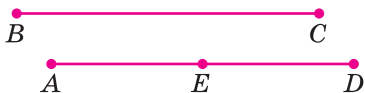


Рис. 182

266. С помощью циркуля на рисунке 182 найдите равные отрезки. Сколько отрезков разной длины на этом рисунке? Измерьте их и нарисуйте прямоугольник с такими измерениями.

267. Как с помощью циркуля сравнить два отрезка? Постройте отрезки, равные отрезкам BC и ED (см. рис. 182). Для откладывания отрезков используйте циркуль.

268. Постройте угол A , равный 110° . На одной из его сторон отметьте точку B . Постройте луч с началом в точке B так, чтобы он образовывал с лучом BA угол в 35° и пересекал другую сторону угла A в определенной точке C . Измерьте стороны построенного треугольника ABC . Какой это треугольник? Запишите величины его углов.

269. Постройте угол K , равный 55° . На одной из его сторон отметьте точку L . Постройте луч с началом в точке L так, чтобы он образовывал с лучом LK угол в 65° и пересекал другую сторону угла K в определенной точке M . Измерьте стороны построенного треугольника KLM . Какой это треугольник? Запишите величины его углов.

270. Постройте прямоугольник, найдите его периметр и площадь, учитывая, что измерения прямоугольника равны:

а) 40 мм и 60 мм;	в) 5 мм и 3 см 4 мм;
б) 6,7 см и 2,1 см;	г) 3 см 6 мм и 3 см 6 мм.

271. Катет прямоугольного треугольника равен 35 мм, его периметр — 84 мм, а гипотенуза — 37 мм. Найдите второй катет. Постройте этот треугольник.

272. Диагонали четырехугольника точкой пересечения разделились пополам. Докажите, что диа-

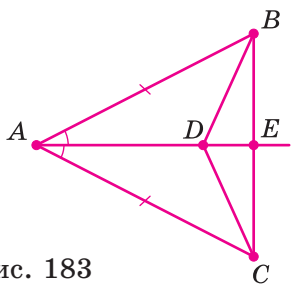


Рис. 183

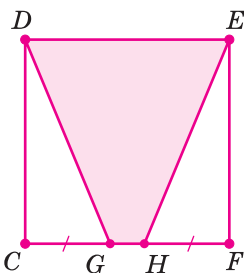


Рис. 184

гоналями разбили четырехугольник на две пары равных треугольников.

273. На рисунке 183 равные отрезки и углы отмечены одинаково. Равенство каких треугольников на этом рисунке можно обосновать?

274. На стороне CF квадрата $CDEF$ выбраны точки G и H так, что отрезки CG и FH равны. Эти точки соединены соответственно с точками D и E (рис. 184). Найдите:

- а) периметр четырехугольника $DEHG$, учитывая, что катеты треугольника CDG равны 48 мм и 20 мм, а гипотенуза треугольника FEH равна 52 мм;
- б) углы четырехугольника $DEHG$, учитывая, что $\angle FEH = 23^\circ$.

275. Диагонали MN и PQ четырехугольника $MPNQ$ оказались перпендикулярными, и каждая из них точкой пересечения O разделилась пополам (рис. 185). Докажите, что у этого четырехугольника все стороны равны.

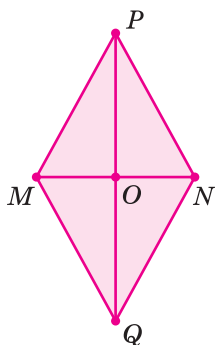


Рис. 185

276. Постройте равнобедренный треугольник PQR с основанием PR , учитывая, что:

- а) $PQ = 16$ мм; $\angle Q = 170^\circ$;
- б) $PQ = 65$ мм; $\angle R = 50^\circ$;
- в) $PQ = 24$ мм; $\angle P = 20^\circ$;
- г) $PQ = 8,2$ см; $\angle P = 90^\circ$.

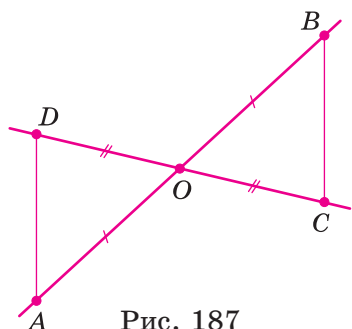


Рис. 187

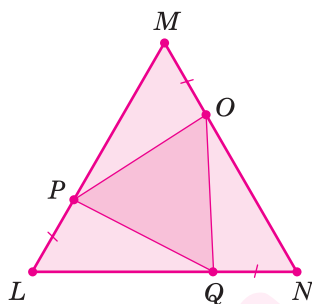


Рис. 188

282. Вычислите:

- а) $12\frac{3}{7} : 6$; в) $-4,6 \cdot (-1,5)$; д) $3,27 \cdot 4 + 4,73 \cdot 5$;
 б) $7\frac{1}{9} \cdot 6$; г) $-6,3 : 1,5$; е) $4,39 \cdot 19 - 6,39 \cdot 20$.

283. Представьте произведением выражение:

- а) $6a + 2$; в) $4m + 5m$; д) $7t + 5 + 8t$;
 б) $-3x + 12$; г) $3y - 8y$; е) $4z - 21 - 18z$.

284. Вынесите общий множитель за скобки:

- а) $k + k^2$; г) $3b^3 + 9b^2$; ж) $12x - 8y + 16xy$;
 б) $a^3 - a^2$; д) $6 - 9w^2$; з) $6a^3b + 24a^3b^3 + 6a^2b^2$;
 в) $2l - 2l^2$; е) $5v - 10vw$; и) $11kl^2 + 22kl + 11kl^2$.

285. Решите уравнение:

- а) $5,9y - (3,5 - 2,1y) = 10,2 + (7,3 - 6y)$;
 б) $0,9v - 3,3 = (5,3v + 7,1) - (7,2v - 4,3)$;
 в) $\left(\frac{5}{6}a - \frac{1}{4}\right) - \left(3\frac{1}{3} - 2\frac{3}{4}a\right) = 3\frac{1}{6}a - 4\frac{2}{3}$;
 г) $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{6}{7} - 0,6x\right) - \left(1\frac{5}{7} + 1,2x\right) : 2 = 2,2x - 1\frac{3}{7}$.

286. Удвоенный процент территории Ганцевичского района, занятой сельскохозяйственными угодьями, на 0,6 % больше процента территории, занятой лесами. Какой процент территории Ганцевичского района занят лесами и какой сельско-

хозяйственными угодьями, если другие земли составляют 20,2 % территории района? Постройте соответствующую круговую диаграмму.

287. Используя сведения из предыдущей задачи, найдите с точностью до тысяч гектаров площади сельскохозяйственных угодий и лесов Ганцевичского района, если другие земли занимают $343,4 \text{ км}^2$.

288. По Ганцевичскому району протекают реки Припяти — Лань, Цна, Бобрик. Лань длиннее Цны на 21 км и длиннее Бобрика на 38 км. Найдите длины этих рек, учитывая, что 6 длин Лани равны 7 длинам Цны.

289. Токарь изготовил 96 деталей, а его ученик — 16 деталей. Найдите производительности труда токаря и ученика в отдельности, учитывая, что время работы токаря было в два раза большим, а вместе токарь и ученик за час изготавливают 16 деталей.

290. У одного хозяина вместе 19 кур и коз, у которых 86 ног. Сколько у него кур и сколько коз?

291. Барань и Копысь — населенные пункты в Оршанском районе. В них вместе проживает 12,9 тыс. жителей. Сколько жителей в Барани и Копыси в отдельности, если население Барани составляет 1512,5 % населения Копыси?

292. В книжный магазин привезли книги двух авторов: 5 упаковок книг первого автора и 7 упаковок второго. Всего привезли 220 книг обоих авторов. Учитывая, что количества книг первого и второго авторов в упаковке относятся как 4 : 5, найдите по отдельности количества книг первого и второго авторов.

293. В книжный магазин привезли книги двух авторов: в упаковке книг первого автора — 8 книг, а второго — 12 книг. Всего привезли 288 книг обоих авторов. Учитывая, что количества упаковок

120

книг первого и второго авторов относятся как 3 : 4, найдите по отдельности количества книг первого и второго авторов.

* * *

294. После велосипедной гонки, в которой участвовало пятеро школьников, пятеро зрителей обсуждали ее результаты.

Первый сказал: «Сергей был вторым, а Андрей третьим».

Второй сказал: «Третьим был Петя, а последним Толя».

Третий сказал: «Нет, Толя выиграл гонку, а Петя был вторым».

Четвертый сказал: «Вторым был Сергей, а четвертым Иван».

Пятый сказал: «Правильно, Иван был четвертым, но первым был Андрей».

Найдите правильное распределение мест, зная, что каждый из зрителей один раз сказал правду и один раз ошибся.

295. Два колокола начали и закончили бить одновременно. Удары первого происходили через 2 с, а второго — через 3 с. Всего было слышно 13 ударов (совпавшие удары воспринимались как один). Сколько времени прошло между первым и последним ударами?

296. Число оканчивается цифрой 2. Если переставить эту цифру с конца в начало, то число удвоится. Найдите наименьшее число с таким свойством.

9. Равные треугольники

А) С треугольником связывается ряд других понятий. Прежде всего это его стороны и его углы. Введем в рассмотрение еще три понятия.

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется **медианой** треугольника.

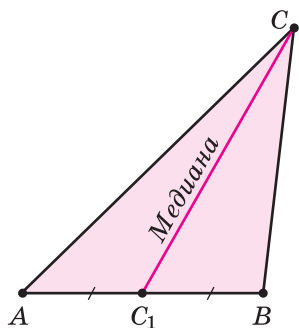


Рис. 189

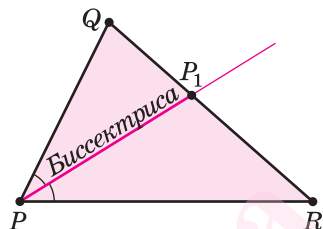


Рис. 190

На рисунке 189 показана медиана CC_1 , проведенная к стороне AB треугольника ABC .

На рисунке 190 построена биссектриса угла P треугольника PQR . Она пересекает противоположную сторону треугольника в точке P_1 . Отрезок биссектрисы угла, ограниченный вершиной угла и точкой пересечения биссектрисы с противоположной стороной треугольника, называется **биссектрисой** треугольника.

На рисунке 190 луч PP_1 — биссектриса угла QPR , а отрезок PP_1 — биссектриса треугольника QPR .

На рисунках 191 и 192 показаны прямые MM_1 и TT_1 , проходящие через одну из вершин треугольника перпендикулярно прямой, содержащей противоположную сторону. Отрезок такой прямой, ограни-

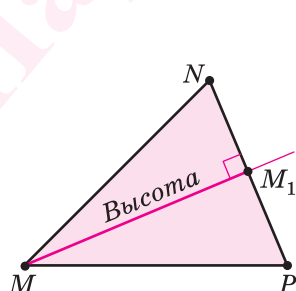


Рис. 191

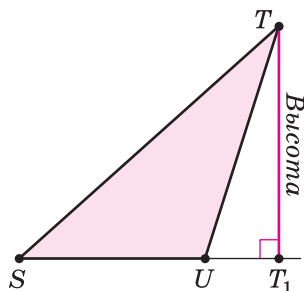


Рис. 192

ченный вершиной треугольника и точкой пересечения с противоположащей стороной или ее продолжением, называется **высотой** треугольника. Сторона треугольника, к которой проведена высота, называется **основанием** треугольника.

Точку медианы, биссектрисы, высоты треугольника, принадлежащую стороне треугольника или ее продолжению, называют **основанием** медианы, биссектрисы, высоты соответственно.

У каждого треугольника есть три медианы, три биссектрисы, три высоты.

Стороны, углы, биссектрисы, медианы, высоты треугольника — все это *элементы* треугольника.

Мы называем фигуры равными, если они совмещаются при наложении. У равных фигур равны все соответствующие элементы. Важным представляется и обратный вопрос о том, что достаточно знать о двух фигурах, чтобы быть уверенными, что эти фигуры равны. Два отрезка равны, если их длины равны; два угла равны, если равны их градусные меры. Зададимся вопросом о том, равенство каких соответствующих элементов двух треугольников приводит к равенству треугольников, а значит, и равенству их других соответствующих элементов.

В предыдущем параграфе мы доказали, что *если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Утверждение этой теоремы **1** называют **первым признаком равенства треугольников**.

Б) Теорема 2. *Если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника равны соответственно стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.*

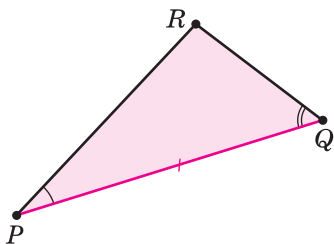


Рис. 193

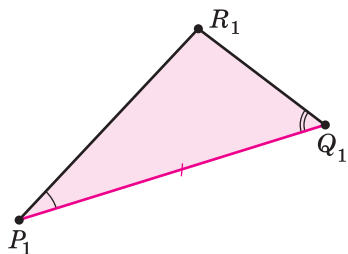


Рис. 194

Доказательство. Пусть построено два треугольника PQR (рис. 193) и $P_1Q_1R_1$ (рис. 194), у которых $PQ = P_1Q_1$; $\angle QPR = \angle Q_1P_1R_1$; $\angle PQR = \angle P_1Q_1R_1$. Тогда можно так наложить треугольник PQR на треугольник $P_1Q_1R_1$, чтобы сторона PQ совпала с равной ей стороной P_1Q_1 , угол QPR совпал с равным ему углом $Q_1P_1R_1$, а угол PQR — с равным ему углом $P_1Q_1R_1$. Точка R принадлежит лучам PR и QR , которые наложились на лучи P_1R_1 и Q_1R_1 . Значит, точка R окажется и на луче P_1R_1 , и на луче Q_1R_1 , т. е. совпадет с единственной общей точкой R_1 этих лучей. Поскольку у треугольников PQR и $P_1Q_1R_1$ совпадут все три вершины, то они совпадут целиком. Это означает, что $\triangle PQR = \triangle P_1Q_1R_1$.

Утверждение теоремы 2 называют **вторым признаком равенства треугольников**.

- ?**
1. Какой отрезок называют медианой треугольника; биссектрисой треугольника; высотой треугольника?
 2. Сформулируйте первый признак равенства треугольников (по двум сторонам и углу между ними).
 3. Сформулируйте второй признак равенства треугольников (по стороне и прилежащим углам).

297. На рисунке 195 показаны четыре луча, выходящие из точки O , причем $\angle AOB = \angle COD$. На них выбраны точки A, B, C, D так, что $OA = OD$ и $OB = OC$. Назовите пары равных треугольников с вершинами в точках A, B, C, D .

Рис. 195

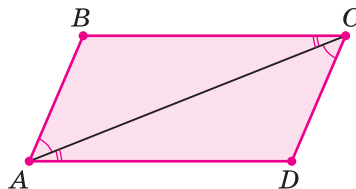
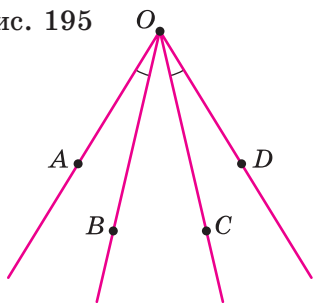


Рис. 196

298. Диагональ четырехугольника образует с противоположными сторонами равные углы (рис. 196). Докажите, что противоположные углы четырехугольника попарно равны.

299. На рисунке 197 равные углы отмечены одинаково. Равенство каких треугольников на этом рисунке можно обосновать? Можно ли доказать, что треугольник BDE прямоугольный?

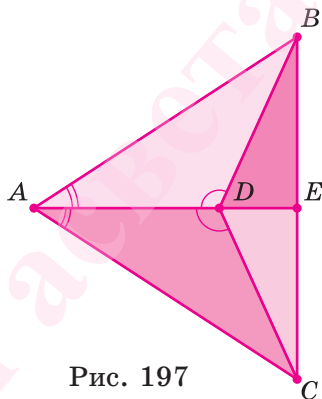


Рис. 197

300. От точки M пересечения двух прямых на одной из них отложили два равных отрезка MR и MS , на другой — равные отрезки MU и MV . Докажите, что отрезки RV и US также равны.

301. DD_1 — медиана треугольника CDE . На луче DD_1 отложен отрезок D_1F , равный отрезку D_1D (рис. 198). Докажите, что $CF = DE$ и $EF = DC$.

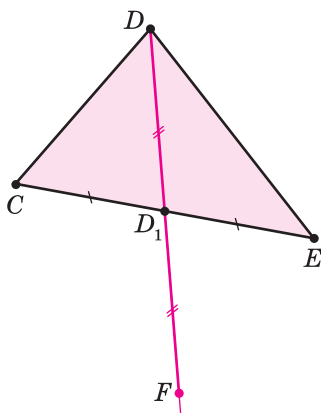


Рис. 198

302. Докажите, что диагонали квадрата равны и перпендикулярны.

303. Начертите в тетради произвольный треугольник. Постройте треугольник, равный начерченному. Какие способы такого построения вы можете предложить?

304. Начертите в тетради произвольный угол. Постройте угол, равный начерченному. Какие способы такого построения вы можете предложить?

305. Постройте точки A_1 и B_1 , симметричные точкам A и B относительно некоторой прямой. Докажите, что:

а) $\triangle AA_1B = \triangle AA_1B_1$; б) $\triangle ABB_1 = \triangle A_1BB_1$.

306. Для измерения на местности расстояния от точки M до точки N , между которыми нельзя пройти (рис. 199), выбирают точку A , из которой видны обе точки M и N . Провешивают отрезки MA и NA и продолжают их за точку A так, что $AM_1 = AM$ и $AN_1 = AN$. Измеряют расстояние M_1N_1 и принимают его за искомое расстояние между точками M и N . Почему так можно делать?

307. Для измерения на местности расстояния между двумя точками A и B , одна из которых недоступна, провешивают направление луча AB до некоторой точки C (рис. 200). Выбирают точку K , из которой видна точка A и можно пройти к точкам B и C . Провешивают направления лучей BK и CK ,

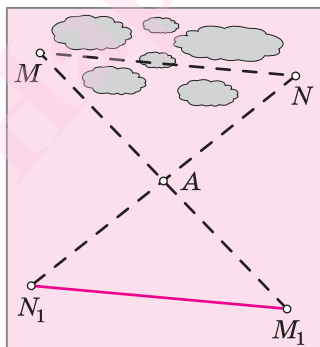


Рис. 199

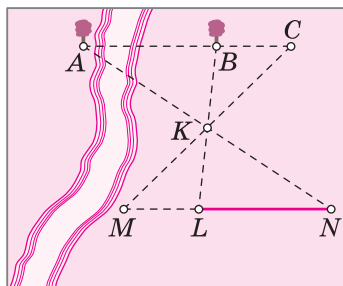


Рис. 200

на которых находят точки L и M так, что $KL = KB$ и $KM = KC$. Провешивают направление луча ML и на нем находят точку N , которая лежит и на луче AK . Измеряют расстояние LN и принимают его за искомое расстояние между точками A и B . Почему так можно делать?

308. Углы QPR и QRP треугольника PQR равны соответственно 64° и 50° . Из вершины Q провели высоту и медиану и продлили их за сторону PR на расстояния, равные им. Концевые точки S и T полученных отрезков соединили с вершиной R . Найдите угол SRT .

309. Можно ли утверждать, что если две стороны и угол одного:

а) треугольника равны двум сторонам и углу другого, то такие треугольники равны;

б) тупоугольного треугольника равны двум сторонам и углу другого тупоугольного треугольника, то такие треугольники равны;

в) остроугольного треугольника равны двум сторонам и углу другого остроугольного треугольника, то такие треугольники равны?

310. На рисунке 201 равны друг другу углы B и C , а также отрезки BM и CN . Докажите, что $AB = AC$.

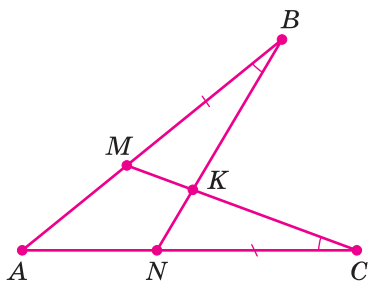


Рис. 201

311. Запишите в стандартном виде число:

а) 576; б) 3001; в) 0,00067; г) 0,1.

312. По карте масштаб 1 : 2 500 000 Василий определил, что расстояние от Минска до Чернигова



Рис. 202

равно 146 мм, угол между направлениями Минск — Смоленск и Минск — Чернигов равен 71° , а между направлениями Чернигов — Смоленск и Чернигов — Минск равен 48° (рис. 202). Постройте план взаимного расположения названных городов и по нему определите реальные расстояния от Смоленска до Минска и от Смоленска до Чернигова.

313. Один поезд вышел из Бреста в Брянск (рис. 203) со скоростью 53 км/ч, другой на час позже из Брянска в Брест со скоростью v . Поезда встретились через t ч после выхода первого поезда. Выразите:
- а) v через t ; б) t через v .



Рис. 203

314. При вычитании десятичных дробей в уменьшаемом ошибочно поставили десятичную запятую на один знак левее, чем нужно, и вместо разности 3,7 получили 13,15. Найдите правильные уменьшаемое и вычитаемое.

315. Когда перед двузначным числом написали цифру 3, то получилось трехзначное число, большее исходного двузначного в 4 раза и еще на 39. Найдите исходное число.

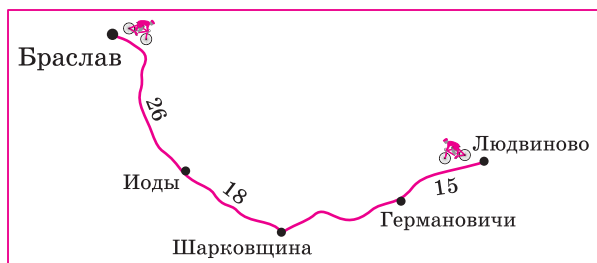


Рис. 204

316. Из Браслава и Людвиново (рис. 204) навстречу друг другу одновременно выехали два велосипедиста и встретились через $2,5$ ч между Шарковщиной и Германовичами в 1 км от Шарковщины. Найдите скорости велосипедистов и расстояние между Шарковщиной и Германовичами, учитывая, что скорость людвинковского велосипедиста составляла $\frac{7}{9}$ скорости браславского.

317. Волга, Урал, Кура — крупнейшие реки, впадающие в Каспийское море. Длина Волги такова, что она на 562 км меньше утроенной длины Куры, на 38 км больше удвоенной длины Урала, уменьшенной на длину Куры. Найдите длины этих рек, учитывая, что Урал длиннее Куры на 1064 км.

318. По рисунку 205, на котором представлены соотношения между площадями водосборов Волги, Урала, Куры, составьте задачу и решите ее.

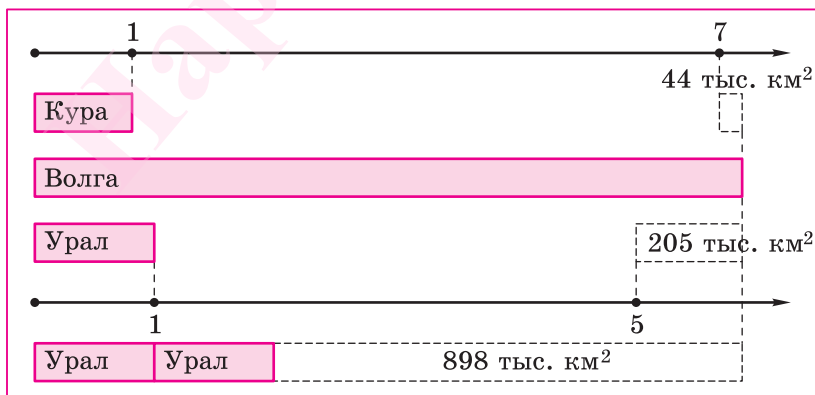


Рис. 205

319. Объем воды Каспийского моря составляет 78 тыс. км³. Определите, сколько процентов этого объема составляет годовой сток каждой из рек — Волги, Урала, Куры, учитывая, что среднегодовой сток Волги равен 7140 м³/с, Урала — 225 м³/с, Куры — 270 м³/с.

320. Отец с сыном ведрами носили воду, причем ведро отца вмещало на 5 л воды больше, чем ведро сына. Отец принес ведер в 3 раза больше сына. Найдите, сколько ведер принесли отец и сын в отдельности, учитывая, что отец заполнил бочку вместимостью 210 л, а сын — кадку, вмещающую 35 л.

321. С первого поля урожайностью 30 ц/га собрали на 180 ц ячменя больше, чем со второго урожайностью 33 ц/га. Учитывая, что площади первого и второго полей относятся как 7 : 5, найдите, сколько ячменя собрали с каждого поля.

322. С первого поля площадью 24 га собрали на 170 ц ячменя больше, чем со второго площадью 22 га. Учитывая, что урожайности первого и второго полей относятся как 6 : 5, найдите, сколько ячменя собрали с каждого поля.

* * *

323. Найдите трехзначное и четырехзначное числа, учитывая, что их сумма равна 1576, а сумма обращенных чисел равна 4375.

324. Найдите два таких числа, сумма, произведение и частное которых равны между собой.

325. Найдите наименьшее натуральное число, сумма цифр которого в два раза больше суммы цифр утроенного числа.

10. Равнобедренный треугольник

А) Треугольник, у которого имеются равные стороны, называется *равнобедренным*.

Каждая из равных сторон равнобедренного треугольника называется *боковой стороной*, а третья сторона — *основанием* равнобедренного треугольника (рис. 206).

Треугольник, в котором все стороны равны, называют *равносторонним* (рис. 207).

Теорема 3. Если треугольник является равнобедренным, то:

а) углы при его основании равны;

б) его биссектриса, медиана и высота, проведенные к основанию, совпадают.

Доказательство. Пусть треугольник NMO равнобедренный: $MN = NO$ (рис. 208). Построим его биссектрису NN_1 .

У треугольников MNN_1 и NN_1O :

$\angle MNN_1 = \angle ONN_1$, поскольку NN_1 — биссектриса;

$MN = NO$ по условию;

NN_1 — общая сторона.

В соответствии с первым признаком равенства треугольников заключаем, что $\triangle MNN_1 = \triangle ONN_1$. Это означает, что в треугольниках равны все соответствующие элементы. Поэтому $\angle NMN_1 = \angle NON_1$.

Поскольку $MN_1 = N_1O$, то NN_1 — медиана. Поскольку $\angle MN_1N = \angle ON_1N$, а вместе эти углы составляют развернутый угол, то каждый из них равен 90° . Значит, NN_1 — высота.

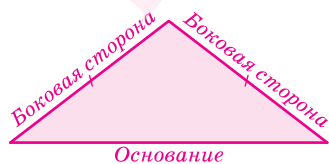


Рис. 206

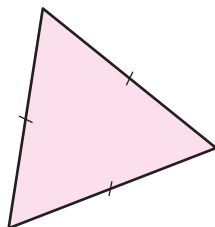


Рис. 207

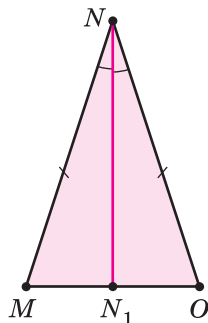


Рис. 208

Мы доказали, что биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является его медианой и высотой. А поскольку к основанию можно провести только одну биссектрису, одну медиану и одну высоту, то медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой, как и высота является биссектрисой и медианой.

Следствие. *Углы равностороннего треугольника равны друг другу и равны 60° каждый.*

Пусть треугольник KLM является равносторонним (рис. 209). Если рассматривать его как равнобедренный треугольник с основанием KL , то $\angle K = \angle L$, а если как равнобедренный треугольник с основанием LM , то $\angle L = \angle M$. Значит, $\angle K = \angle L = \angle M$. Учитывая, что $\angle K + \angle L + \angle M = 180^\circ$, получаем, что каждый из них равен 60° .

Б) Теорема 4. *Если в треугольнике два угла равны, то такой треугольник является равнобедренным.*

Доказательство. Пусть углы E и G треугольника EFG равны (рис. 210). Сделаем копию треугольника EFG и перевернем ее, получим треугольник GFE (рис. 211). Наложим треугольник GFE на треугольник EFG . Тогда сторона GE наложится на сторону EG , а лучи GF и EF треугольника GFE наложатся соответственно на лучи EF и GF треугольника EFG . Значит, общая точка лучей GF и EF совпадет с общей

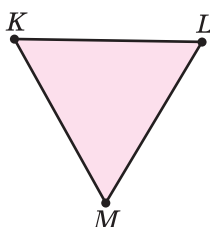


Рис. 209

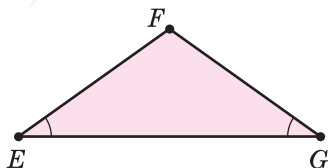


Рис. 210

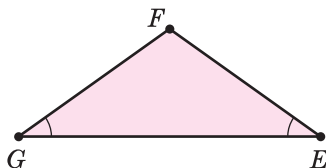


Рис. 211

точкой лучей EF и GF , и треугольники EFG и GFE совмещаются целиком. Поэтому $EF = GF$, т. е. треугольник EFG равнобедренный с основанием GE .

В) Теорема 5. Если в треугольнике медиана и высота, проведенные из одной вершины, совпадают, то такой треугольник является равнобедренным.

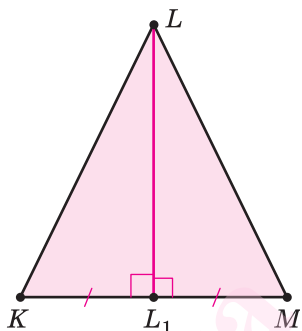


Рис. 212

Доказательство. Пусть отрезок LL_1 является медианой и высотой треугольника KLM (рис. 212). Тогда $KL_1 = ML_1$, а $\angle KL_1L = \angle ML_1L = 90^\circ$. Учитывая, что отрезок LL_1 — общая сторона треугольников KL_1L и ML_1L , по первому признаку равенства треугольников получаем, что $\triangle KL_1L = \triangle ML_1L$. Поэтому $KL = LM$.

Г) Теорема 6. Если в треугольнике биссектриса и высота, проведенные из одной вершины, совпадают, то такой треугольник является равнобедренным.

Доказательство. Пусть отрезок OO_1 является биссектрисой и высотой треугольника NOP (рис. 213). Тогда $\angle NOO_1 = \angle POO_1$, а $\angle NO_1O = \angle PO_1O = 90^\circ$. Учитывая, что отрезок OO_1 является общей стороной треугольников NO_1O и PO_1O , по второму признаку равенства треугольников получаем, что $\triangle NO_1O = \triangle PO_1O$. Поэтому $NO = PO$.

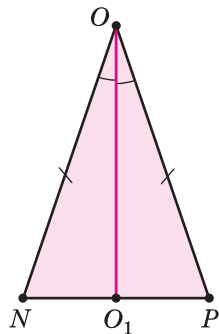


Рис. 213

Д) Теорема 7. Если в треугольнике медиана и биссектриса, проведенные из одной вершины, совпадают, то такой треугольник является равнобедренным.

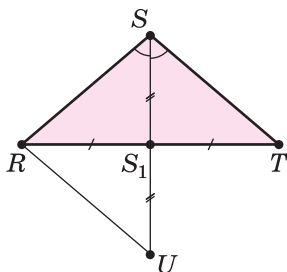


Рис. 214

Доказательство. Пусть отрезок SS_1 является медианой и биссектрисой треугольника RST (рис. 214).

На луче SS_1 за точку S_1 отложим отрезок S_1U , равный медиане SS_1 . Точку U соединим с точкой R .

Стороны SS_1 и S_1T треугольника SS_1T соответственно равны сторонам US_1 и S_1R треугольника US_1R , равны и углы SS_1T и US_1R этих треугольников как вертикальные. По первому признаку равенства треугольников получим, что $\triangle SS_1T = \triangle US_1R$. Поэтому $ST = UR$ и $\angle TSS_1 = \angle RUS_1$. Поскольку по условию отрезок SS_1 является биссектрисой, то $\angle RSS_1 = \angle TSS_1$. Значит, $\angle RSS_1 = \angle RUS_1$. С учетом первой части теоремы получаем, что $UR = RS$. А поскольку уже доказано, что $ST = UR$, то $RS = ST$.



1. Какой треугольник называют равнобедренным? Какую сторону равнобедренного треугольника называют боковой стороной; основанием?
2. Какой треугольник называют равносторонним?
3. Сформулируйте свойства равнобедренного треугольника.
4. Сформулируйте свойства равностороннего треугольника.
5. Сформулируйте признаки равнобедренного треугольника.

326. Постройте равнобедренный треугольник:

- а) с основанием в 55 мм и углом при основании в 45° ;
- б) с основанием в 50 мм и углом против основания в 50° ;
- в) с боковой стороной в 45 мм и углом против основания в 110° ;
- г) с боковой стороной в 40 мм и углом при основании в 70° .

327. На боковой стороне равнобедренного треугольника построен равносторонний треугольник, периметр которого равен 60 см. Найдите основание равнобедренного треугольника, учитывая, что его периметр равен 55 см.

328. Стороны TS и TU треугольника STU равны. На этих сторонах выбраны такие точки A и B , что $TA = TB$ (рис. 215). Докажите, что диагонали четырехугольника $SABU$ равны.

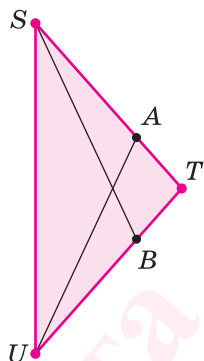
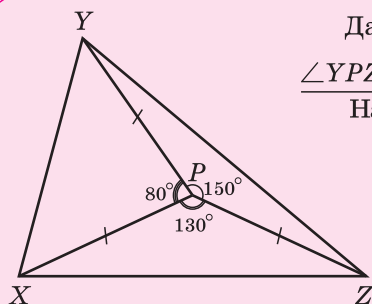


Рис. 215

329. На плоскости выбраны четыре точки P, X, Y, Z так, что $PX = PY = PZ$ и $\angle XPY = 80^\circ$; $\angle YPZ = 150^\circ$; $\angle ZPX = 130^\circ$. Найдите углы треугольника XYZ (рис. 216).



Дано: $PX = PY = PZ$, $\angle XPY = 80^\circ$,
 $\angle YPZ = 150^\circ$, $\angle ZPX = 130^\circ$.

Найти: $\angle YXZ$, $\angle XYZ$, $\angle YZX$.

Решение.

$80^\circ + 150^\circ + 130^\circ = 360^\circ$ — полный угол, поэтому такое расположение точек P, X, Y, Z возможно.

$\triangle XPY$ — равнобедренный с

основанием XY , поэтому $\angle PXY = \angle PYX = (180^\circ - 80^\circ) : 2 = 50^\circ$.

Также $\angle PYZ = \angle PZY = (180^\circ - 150^\circ) : 2 = 15^\circ$

и $\angle PXZ = \angle PZX = (180^\circ - 130^\circ) : 2 = 25^\circ$.

Поэтому: $\angle YXZ = \angle PXY + \angle PXZ = 50^\circ + 25^\circ = 75^\circ$;

$\angle XYZ = \angle PYX + \angle PYZ = 50^\circ + 15^\circ = 65^\circ$;

$\angle YZX = \angle PZY + \angle PZX = 15^\circ + 25^\circ = 40^\circ$.

Ответ: $75^\circ, 65^\circ, 40^\circ$.

Рис. 216

330. Докажите, что в равнобедренном треугольнике:

- биссектрисы углов при основании равны;
- медианы, проведенные к боковым сторонам, равны;
- высоты, опущенные на боковые стороны, равны.

331. Стороны KL и KM треугольника KLM соответственно равны 14 и 15. На стороне KL выбрана такая точка A , что $KA:AL = 3:4$, а на стороне KM — такая точка B , что $KB:BM = 2:3$. Определите, в каком отношении биссектриса угла K делит отрезок AB .

332. В треугольнике ABC (рис. 217) построена биссектриса BB_1 . Из точки B проведен луч BD так, что $\angle B_1BD = \angle BB_1C$, а точка D выбрана так, что $BD = B_1C$. Отрезок DB_1 пересекает отрезок AB в точке E . Докажите, что $BE = B_1E$.

333. На боковых сторонах PQ и RQ равнобедренного треугольника построены равносторонние треугольники PAQ и RBQ (рис. 218). Точки A и B соединены с серединой S основания PR . Докажите, что:

- а) $AS = BS$; б) $AK = BL$.

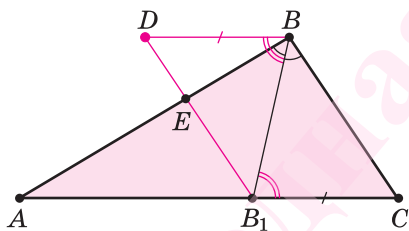


Рис. 217

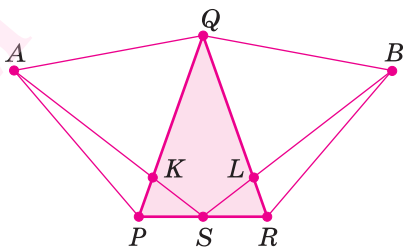


Рис. 218

334. На сторонах XY , YZ , ZX равностороннего треугольника выбраны соответственно точки A , B , C так, что $XA = YB = ZC$. Докажите, что прямые XB , YC , ZA при пересечении образуют равносторонний треугольник.

335. Найдите угол между медианами равностороннего треугольника.

336. Докажите, что если в прямоугольном треугольнике:

- а) катет лежит против угла в 30° , то он равен половине гипотенузы;

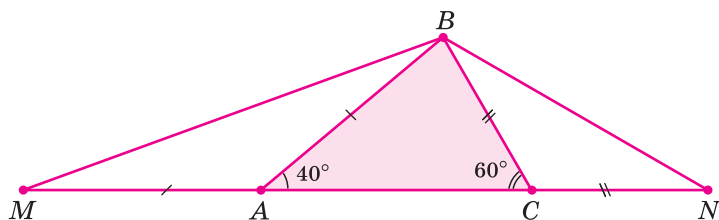


Рис. 219

б) катет равен половине гипотенузы, то он лежит против угла в 30° .

337. На продолжении стороны AC за точку A выбрана точка M так, что $AM = AB$, а на продолжении за точку C выбрана точка N так, что $CN = CB$. Найдите углы треугольника MBN , учитывая, что:

а) $\angle BAC = 40^\circ$; $\angle BCA = 60^\circ$ (рис. 219);

б) $\angle BAC = \alpha$; $\angle BCA = \beta$.

338. На сторонах угла A величиной в 20° отмечены точки B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 так, что $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B_5$ (рис. 220). Найдите углы треугольника:

а) AB_4B_5 ; б) $B_1B_4B_5$.

339. Докажите, что диагонали четырехугольника с равными сторонами перпендикулярны и делятся точкой пересечения пополам.

340. Докажите, что в равнобедренном треугольнике:

а) три его медианы пересекаются в одной точке;

б) три его биссектрисы пересекаются в одной точке;

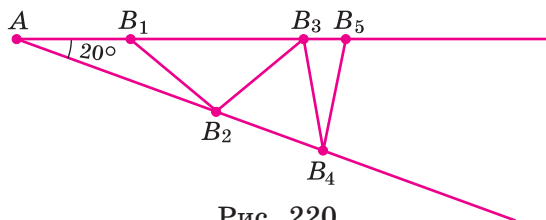


Рис. 220

в) три его высоты или прямые, содержащие высоты, пересекаются в одной точке.

341. Есть два равнобедренных треугольника с равными боковыми сторонами. Можно ли расположить их так, чтобы один из них был внутри другого?

342. Постройте треугольник по координатам его вершин $P(-1; 3)$, $R(-1; -3)$, $S(7; -3)$. Найдите координаты:

а) точек A и B , в которых сторона PS пересекает оси координат;

б) точек C и D , в которых стороны SR и RP пересекают оси координат.

Как можно записать координаты произвольной точки прямой SR ; RP ?

343. Постройте биссектрисы углов P , R , S треугольника, построенного при выполнении упражнения 342. Точки, в которых они пересекают стороны RS , PS , PR , обозначьте E , F , G соответственно. Найдите координаты:

а) точек E , F , G и точки I пересечения биссектрис;

б) точек H , K , в которых биссектриса PE пересекает оси координат;

в) точек L , M , в которых биссектриса RF пересекает оси координат;

г) точек N , Q , в которых биссектриса SG пересекает оси координат.

344. Используя треугольник, построенный при выполнении упражнения 343, и измерив нужные отрезки, найдите с точностью до сотых и сравните отношения:

а) $\frac{SE}{RE}$ и $\frac{PS}{PR}$; б) $\frac{SF}{PF}$ и $\frac{RS}{RP}$; в) $\frac{PG}{RG}$ и $\frac{SP}{SR}$.

345. Свирь, Волхов, Вуокса, Сясь — крупнейшие реки, впадающие в Ладожское озеро — самое большое в Европе (рис. 221). Длина Вуоксы такова, что она на 68 км меньше длины Волхова, ее тридцать девятая доля равна пятьдесят шестой доле длины Свири, а третья доля — пятой доле длины Сяси. Найдите длины



Рис. 221

этих рек, учитывая, что шестьдесят пятая доля длины Сяси равна пятьдесят шестой доле длины Волхова.

346. На схеме, изображенной на рисунке 222, показаны соотношения между площадями водосборов Свири, Волхова, Вуоксы, Сяси. Составьте задачу и решите ее.

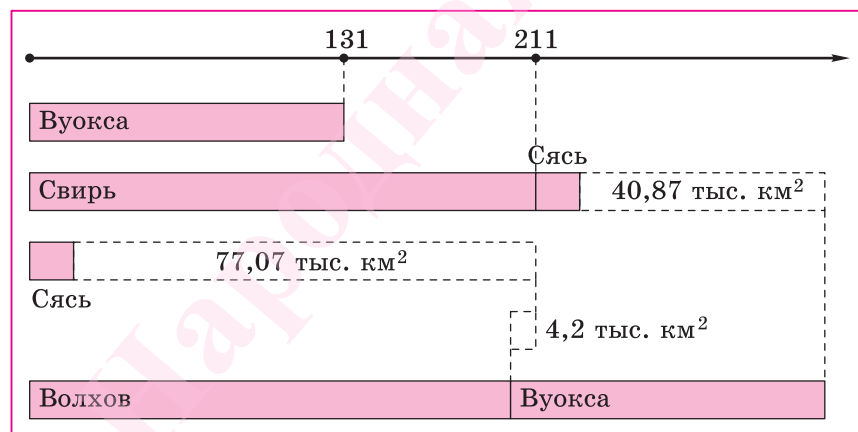


Рис. 222

347. На схеме, изображенной на рисунке 223, показаны соотношения между среднегодовыми расходами воды в устьях Свири, Волхова, Вуоксы, Сяси. Составьте задачу и решите ее.

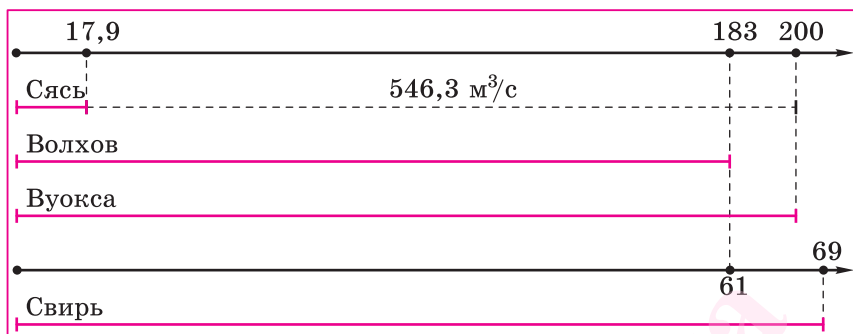


Рис. 223

348. Масса 90 столовых и чайных ложек равна 2150 г. Определите, сколько было столовых и чайных ложек в отдельности, учитывая, что массы столовой и чайной ложки равны соответственно 55 г и 15 г.

349. На склад привезли 90 коробок с конфетами двух производителей. У первого производителя в коробке 30 конфет, а у второго — 20 конфет. Учитывая, что количества конфет первого и второго производителей относятся как 6 : 5, найдите количество конфет каждого производителя.

350. На склад привезли коробки с конфетами двух производителей: первого производителя — 40 коробок, а второго — 20 коробок, причем суммарное количество конфет в одной коробке у первого и второго производителей равно 40. Учитывая, что количества конфет первого и второго производителей относятся как 4 : 3, найдите количество конфет каждого производителя.

* * *

351. Найдите все натуральные значения переменной a , при которых значение выражения $\frac{a+11}{a-9}$ является целым числом.

352. Найдите все наборы (n, z, r) из натурального числа n , целого отрицательного числа z и рационального числа r , удовлетворяющие равенству $3n - 2z = r$, если $-5n + z = -11$.

353. На бумажном листе записано несколько двузначных чисел. «Интересно, использовано не так много цифр, — заметил Богдан, — а выписанные числа при делении на 8 дают все возможные остатки». Какое наименьшее количество цифр могло быть использовано?

11. Свойства и признаки

А) Вы неоднократно встречали в учебном пособии слова *свойство* и *признак*.

Мы говорили о переместительном и сочетательном свойствах сложения и умножения, о distributивном свойстве умножения относительно сложения, о свойстве сторон прямоугольника, квадрата, о свойстве углов равнобедренного треугольника.

Свойство — это утверждение о данном предмете или явлении.

Например, утверждение *Если треугольник равнобедренный, то его биссектриса, медиана и высота, проведенные к основанию, совпадают* выражает свойство равнобедренного треугольника.

Мы говорили также о признаках делимости на 2, на 5, на 3, на 9, о признаке правильной пропорции, о признаках равнобедренного треугольника.

Признаком называют такое утверждение, которое позволяет охарактеризовать сам предмет.

Например, утверждение *Отрезок LL_1 является высотой и биссектрисой треугольника KLM* — это признак равнобедренного треугольника (рис. 224), поскольку его истинность гарантирует истинность утверждения *Треугольник KLM является равнобедренным*

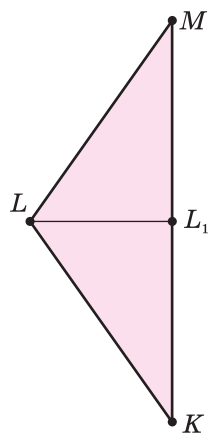


Рис. 224

с основанием *КМ*. Утверждение *Сумма цифр числа n делится на 3* является признаком делимости числа n на 3, поскольку истинность названного утверждения позволяет утверждать, что является истинным и утверждение *Число n делится на 3*.

Б) В геометрии важную роль играют признаки равенства треугольников. В параграфе 9 мы рассмотрели два таких признака. Есть и другие признаки равенства треугольников.

Задача 1. Построить треугольник по его сторонам $AB = 60$ мм, $BC = 30$ мм, $AC = 45$ мм (рис. 225).

Строим отрезок AB длиной 60 мм. С центрами в концах A и B этого отрезка проводим две дуги радиусами 30 мм и 45 мм так, чтобы они пересеклись в некоторой точке C (рис. 226). Тогда длина отрезка AC равна 45 мм, а длина отрезка BC — 30 мм. Треугольник ABC — искомый.

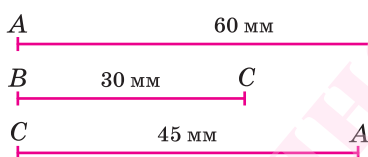


Рис. 225

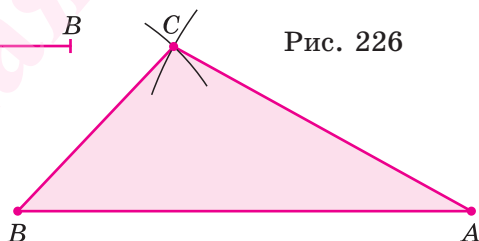


Рис. 226

Теорема 8. *Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого, то такие треугольники равны.*

Доказательство. Пусть построены два треугольника QRS (рис. 227) и $Q_1R_1S_1$ (рис. 228), у которых $QR = Q_1R_1$, $RS = R_1S_1$, $SQ = S_1Q_1$. Докажем, что эти треугольники равны.

Приложим треугольник $Q_1R_1S_1$ к треугольнику QRS так, чтобы равные стороны SQ и S_1Q_1 совместились. Тогда треугольник $Q_1R_1S_1$ займет положение треугольника QR_2S (рис. 229), причем $QR_2 = Q_1R_1$ и $SR_2 = S_1R_1$.

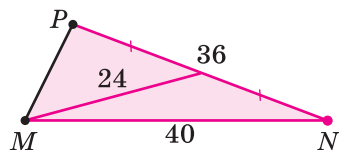
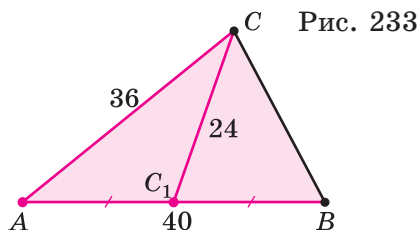


Рис. 234

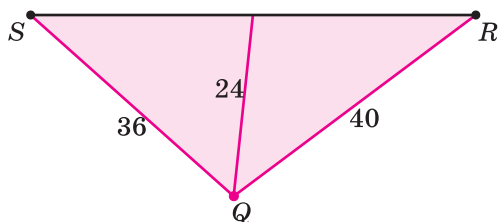


Рис. 235

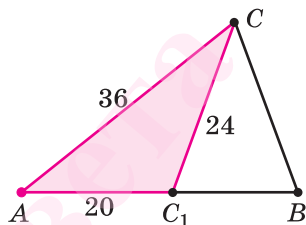


Рис. 236

В) Задача 2. Построим треугольник по двум сторонам длинами 40 мм и 36 мм и медиане длиной 24 мм.

Возможны три разных случая связи данной медианы с данными сторонами: медиана проведена к стороне длиной 40 мм (рис. 233); медиана проведена к стороне длиной 36 мм (рис. 234); медиана проведена к третьей стороне (рис. 235).

Треугольник ABC с медианой, проведенной к стороне длиной 40 мм, можно построить так. Строим треугольник ACC_1 со сторонами $AC_1 = 20$ мм, $AC = 36$ мм, $CC_1 = 24$ мм (рис. 236). На луче AC_1 за точку C_1 отложим отрезок C_1B , равный отрезку AC_1 . Соединим точки B и C отрезком. Треугольник ABC является искомым, поскольку в нем $AB = 40$ мм, $AC = 36$ мм и к стороне AB проведена медиана CC_1 длиной 24 мм.

Треугольник MNP с медианой, проведенной к стороне длиной 36 мм, строится аналогично (рис. 237).

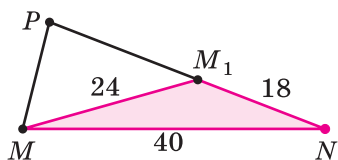


Рис. 237

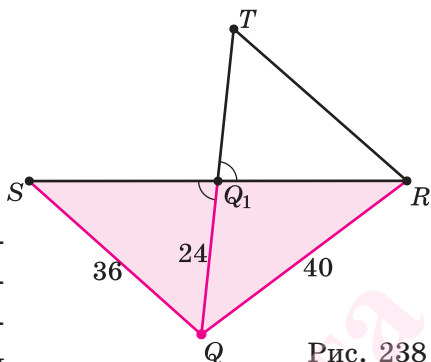


Рис. 238

Путь к построению треугольника QRS с медианой, проведенной к третьей стороне, можно найти так. На луче QQ_1 за точку Q_1 отложим отрезок Q_1T , равный отрезку QQ_1 (рис. 238). Треугольники SQ_1Q и RQ_1T равны по первому признаку равенства треугольников. Поэтому $RT = QS$, и треугольник QRT можно построить по трем сторонам $QR = 40$ мм, $RT = 36$ мм, $QT = 48$ мм. После этого на луче RQ_1 , где Q_1 — середина отрезка QT , за точку Q_1 отложим отрезок Q_1S , равный отрезку RQ_1 . Треугольник QRS является искомым, поскольку в нем $QR = 40$ мм, $QS = 36$ мм, $QQ_1 = 24$ мм и QQ_1 — медиана, проведенная к третьей стороне RS .

Г) Из самого процесса построения понятно, что в любом из случаев треугольник по двум сторонам и медиане строится однозначно. Поэтому можно сформулировать признаки равенства треугольников.

Если две стороны и медиана, проведенная к одной из них, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и медиане, проведенной к соответствующей стороне, другого, то такие треугольники равны.

Если две стороны и медиана, проведенная к третьей стороне, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне, другого, то такие треугольники равны.

Мы видим, что во всех установленных признаках равенства треугольников используются три элемента. Объясняется это тем, что треугольник обычно определяется заданием трех его элементов, хотя бы один из которых является отрезком. Если эти три элемента задают один треугольник, то выполняется и соответствующий признак равенства треугольников.



1. Какие свойства равнобедренного треугольника вы можете сформулировать?
2. Какие признаки равнобедренного треугольника вы можете сформулировать?
3. Сформулируйте первый признак равенства треугольников.
4. Сформулируйте второй признак равенства треугольников.
5. Сформулируйте третий признак равенства треугольников.
6. Какие еще признаки равенства треугольников вы можете сформулировать?

354. Докажите, что если две стороны и медиана, проведенная к:

- а) одной из них, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и медиане, проведенной к соответствующей стороне, другого треугольника, то такие треугольники равны;
- б) третьей стороне, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне, другого треугольника, то такие треугольники равны.

355. Стороны AB и AD четырехугольника $ABCD$ соответственно равны сторонам CD и CB (рис. 239). Докажите, что углы A и C равны.

356. Стороны MN и NO четырехугольника $MNOP$ соответственно равны сторонам MP и PO (рис. 240),

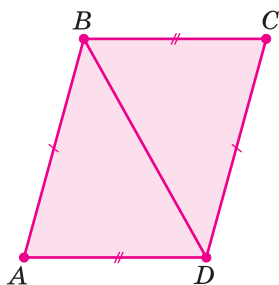


Рис. 239

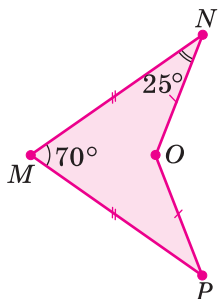


Рис. 240

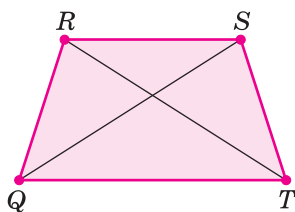


Рис. 241

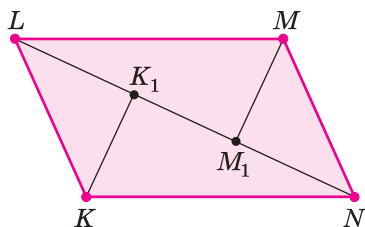


Рис. 242

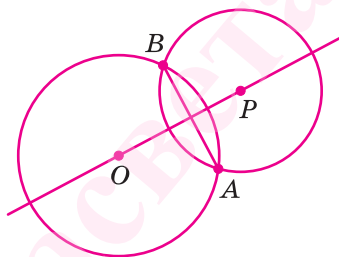


Рис. 243

а углы M и N соответственно равны 70° и 25° . Найдите углы P и O .

357. В четырехугольнике $QRST$ равны стороны QR и TS и диагонали QS и TR (рис. 241). Докажите, что:

- а) $\angle RQT = \angle STQ$; в) $\angle SQT = \angle RTQ$;
 б) $\angle QRS = \angle TSR$; г) $\angle QRT = \angle TSQ$.

358. Стороны KL и MN , а также KN и LM четырехугольника $KLMN$ попарно равны, а отрезки KK_1 и MM_1 перпендикулярны LN (рис. 242). Докажите, что:

- а) $\triangle LKK_1 = \triangle NMM_1$; б) $\triangle LMM_1 = \triangle NKK_1$.

359. Начертите две окружности с центрами O и P , пересекающиеся в точках A и B (рис. 243). Докажите, что прямая OP является *серединным перпендикуляром* к отрезку-хорде AB , т. е. что прямая OP

проходит через середину отрезка AB и перпендикулярна ему.

360. Две окружности с центрами A и B имеют общую хорду PQ . Докажите, что центр любой другой окружности с хордой PQ лежит на прямой AB .

361. EE_1 и LL_1 — биссектрисы треугольников EFG и LMN . При этом $EF = LM$, $EE_1 = LL_1$, $FE_1 = ML_1$. Докажите, что треугольники EFG и LMN равны.

362. У двух четырехугольников соответственно равны стороны. Можно ли утверждать, что эти четырехугольники равны?

363. AB — общее основание равнобедренных треугольников MAB и NAB . Отрезки AB и MN пересекаются в точке H . Докажите, что MN является срединным перпендикуляром к AB .

364. Докажите, что если у четырехугольника противолежащие стороны попарно равны, то диагонали этого четырехугольника точкой пересечения делятся пополам.

365. Докажите, что если в треугольнике две высоты равны, то он равнобедренный.

366. Если из точки O провести лучи OK и OL через концы данного отрезка KL (рис. 244), то образуется угол KOL . Говорят, что отрезок KL *виден из точки O под углом KOL* . Докажите, что равные хорды одной окружности видны из ее центра под равными углами.

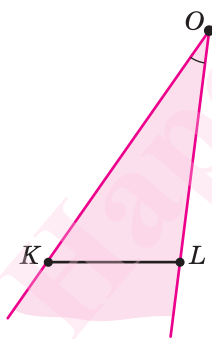
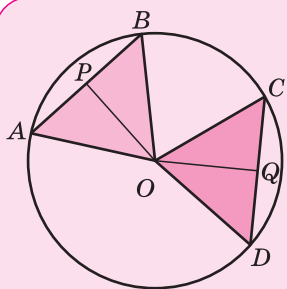


Рис. 244

367. Докажите, что середины равных хорд одной окружности равноудалены от центра этой окружности (рис. 245).



Дано: AB и CD — хорды круга с центром O , $AB = CD$, $PA = PB$, $QC = QD$.

Доказать: $OP = OQ$.

Доказательство.

$OA = OD$ и $OB = OC$, так как это радиусы одной окружности; $AB = CD$ по условию. Поэтому $\triangle AOB = \triangle ODC$ по трем сторонам.

$\angle PAO = \angle QDO$, так как это соответственные углы равных треугольников;

$PA = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} CD = QD$, $OA = OD$. Поэтому $\triangle PAO = \triangle QOD$ по углу и прилежающим сторонам.

$OP = OQ$, так как это соответственные стороны равных треугольников.

Рис. 245

368. Стороны QR , RS , QS треугольника QRS соответственно равны 65 мм, 36 мм и 80 мм (рис. 246). Через вершину R перпендикулярно биссектрисе угла Q проведена прямая, которая пересекает сторону QS в точке A . Через точку A перпендикулярно биссектрисе угла S проведена прямая, которая пересекает сторону RS в точке B . Наконец, через точку B перпендикулярно биссектрисе угла R проведена прямая, которая пересекает сторону QR в точке C . Найдите длину отрезка QC .

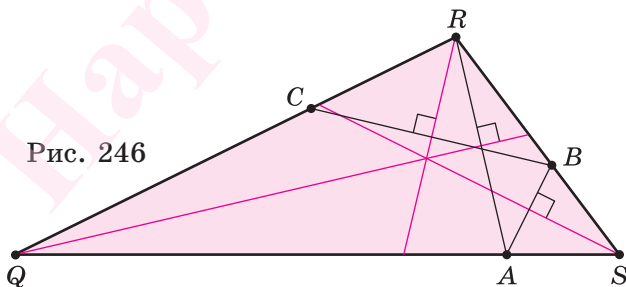


Рис. 246

369. Стороны LM , MN , LN треугольника LMN равны 42 мм, 48 мм и 54 мм соответственно (рис. 247). На них точки K , P , S выбраны так,

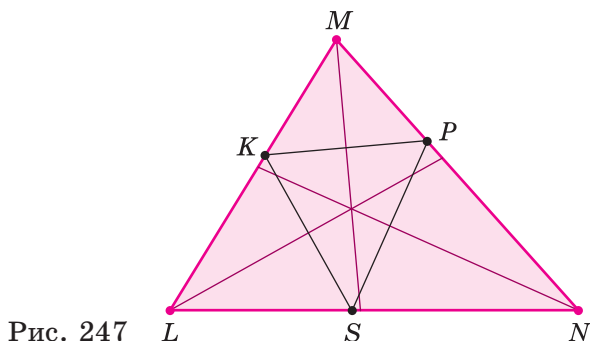


Рис. 247

что прямые KP , PS , KS перпендикулярны соответственно биссектрисам углов M , N , L . Найдите, на какие отрезки точки K , P , S делят стороны треугольника.

370. Постройте четырехугольник по его сторонам, равным 35 мм, 40 мм, 45 мм, 50 мм, и углу в 60° между наибольшей и наименьшей сторонами.

371. Является ли признаком равенства четырехугольников утверждение *Если все стороны и угол одного четырехугольника равны сторонам и углу между соответствующими сторонами другого, то такие четырехугольники равны?*

372. Докажите, что высоты равностороннего треугольника пересекаются под углом в 60° .

373. Треугольники OAB и OMN равны, причем $OB = OM = 35$ мм, $OA = 45$ мм, $ON = 55$ мм. Постройте такие треугольники и найдите AB и MN .

374. На рисунке 248 показана треугольная пирамида $APQR$. Докажите, что все грани этой пирамиды являются равными треугольниками, если:

- а) $AP = QR$, $PQ = AR$, $AQ = PR$;
- б) $AP = QR$, $PQ = AR$, $\angle PAR = \angle ARQ$;
- в) $AP = QR$, $\angle APR = \angle QAP$, $\angle RAP = \angle APQ$;
- г) $\angle APR = \angle PRQ$, $\angle ARP = \angle RPQ$, $\angle ARQ = \angle PAR$.

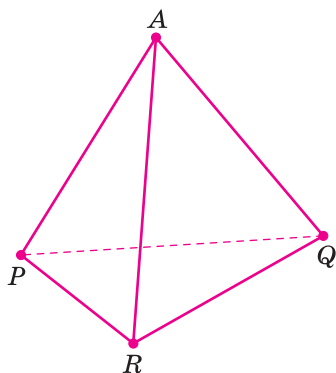


Рис. 248

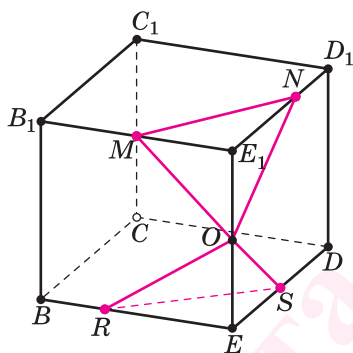


Рис. 249

375. На рисунке 249 изображен куб $BCDEB_1C_1D_1E_1$. Точки M , O , S — середины ребер B_1E_1 , EE_1 и ED . Точка N делит отрезок D_1E_1 в отношении $D_1N : NE_1 = 1 : 2$, а точка R — отрезок BE в отношении $ER : RB = 2 : 1$. Докажите, что треугольники MNO и SRO равны.

376. Решите уравнение:

а) $\frac{3a+4}{5} = \frac{7a-8}{6} + \frac{1+7a}{15}$; б) $\frac{5c-1}{2} + \frac{2c-2}{7} = \frac{13c+9}{6}$.

377. Докажите, что если сторона одного равно-
стороннего треугольника равна стороне другого рав-
ностороннего треугольника, то такие треугольники
равны.

378. На рисунке 250 углы A и B треугольника ABC равны соответственно 40° и 120° . Измерьте отрезок AB и сделайте такой рисунок в тетради в масштабе $3 : 1$. Измерением найдите высоту CC_1 треугольника, проведенную к стороне AB .

379. Для нахождения высоты предмета MN , если непосредственное измерение невозможно, измерили расстояние KL , определили углы между направления-

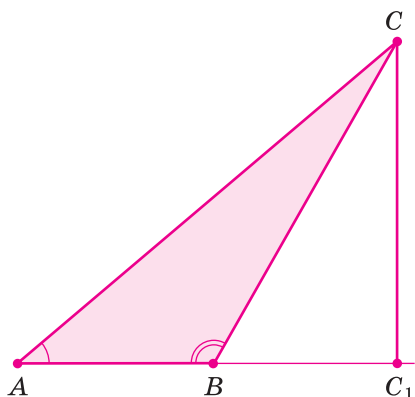


Рис. 250

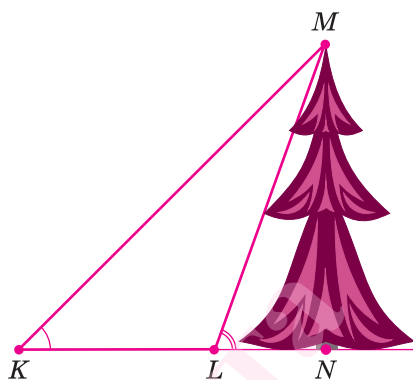


Рис. 251

ми из точек K и L на основание N предмета и на его вершину M (рис. 251). Пусть подобными измерениями нашли, что $KL = 6$ м, $\angle MKN = 45^\circ$, $\angle MLN = 70^\circ$. Сделав в масштабе $1 : 100$ подобный рисунок в тетради, измерением найдите высоту предмета.

380. Олень благородный, косуля, лань, лось — млекопитающие семейства оленевых, живущие или жившие на территории нашей страны. Длина тела лани такова, что она относится к длине тела оленя как $16 : 23$, к длине тела лося как $8 : 15$, к длине тела косули как $32 : 27$ и на 5 см меньше разности длин тел лося и косули. Найдите длины тел этих животных.

381. Высота в холке лани такова, что она относится к высоте оленя как $2 : 3$, к высоте косули как $20 : 17$, а вместе с высотой оленя на 20 см больше высоты лося. Найдите высоты этих животных, учитывая, что высота оленя составляет $\frac{15}{23}$ высоты лося.

382. По рисунку 252, на котором показаны соотношения между массами оленя благородного, косули, лани, лося, составьте задачу и решите ее.

383. Ребра прямоугольного параллелепипеда, сходящиеся в одной вершине, таковы, что одно из

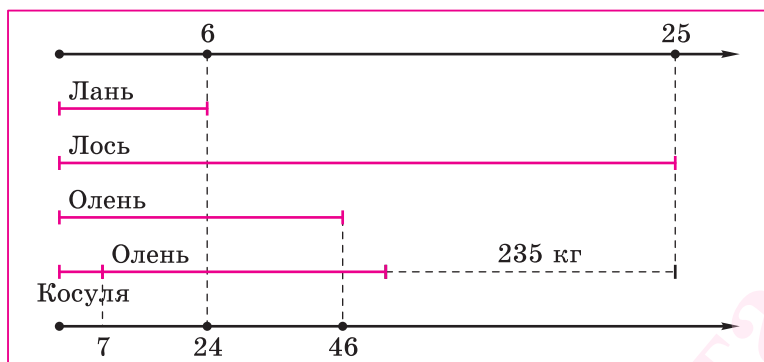


Рис. 252

них равно a , второе — на 2 больше, а третье — на 2 больше второго. Найдите длину L всех ребер прямоугольного параллелепипеда. Выразите a через L .

384. Площадь участка, засеянного рожью, на 5 га больше площади участка, засеянного пшеницей. При этом нормы высева ржи и пшеницы на гектар оказались равными 218 кг и 178 кг соответственно. Какова площадь каждого участка, если на то, чтобы их засеять, понадобилось 3 т 70 кг семян?

385. Катя купила карандаши в коробках по 6 штук и фломастеры в коробках по 18 штук, причем количество коробок карандашей на 5 больше количества коробок фломастеров. Учитывая, что количества карандашей и фломастеров относятся как 2 : 3, найдите, сколько Катя купила коробок карандашей и фломастеров.

386. Катя купила 5 коробок карандашей и 6 коробок фломастеров, причем количество карандашей в коробке на 8 штук больше количества фломастеров. Учитывая, что количество карандашей и количество фломастеров относятся как 5 : 4, найдите, сколько Катя купила карандашей и сколько фломастеров.

* * *

387. Проанализируйте тройки равенств:

$$1^2 + 5^2 = 26;$$

$$4^2 + 10^2 = 116;$$

$$3^2 + 7^2 = 58;$$

$$5^2 + 7^2 = 74;$$

$$26 \cdot 58 = 8^2 + 38^2;$$

$$116 \cdot 74 = 22^2 + 90^2;$$

$$8^2 + 12^2 = 208;$$

$$14^2 + 16^2 = 452;$$

$$208 \cdot 452 = 40^2 + 304^2.$$

Обобщите свои наблюдения, сформулируйте утверждение и попробуйте его обосновать.

388. Докажите, что если при целых значениях переменных a и b значение выражения $a^2 + 5ab + b^2$ делится на 7, то значение выражения $a^2 - b^2$ также делится на 7.

389. У трех братьев вместе 24 конфеты, причем у каждого на 3 конфеты меньше, чем ему лет. Младший брат предложил: «Я оставлю себе половину своих конфет, а остальные разделю между вами поровну. Хорошо было бы, чтобы и средний брат также оставил себе половину конфет, а остальные разделил поровну между старшим братом и мной, а потом и старший брат так же разделил свои конфеты». Так братья и сделали, после чего конфет у них стало поровну. Какой возраст каждого из братьев?

12. Соотношения между элементами треугольника

А) Вы уже знаете некоторые связи между элементами треугольника:

если A, B, C — углы треугольника, то $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ (свойство внутренних углов треугольника);

если a, b, c — стороны треугольника, то $a + b > c$, $a + c > b$ и $b + c > a$ (неравенство треугольника).

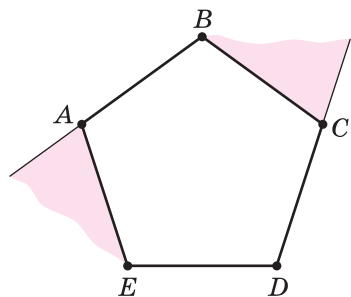


Рис. 253

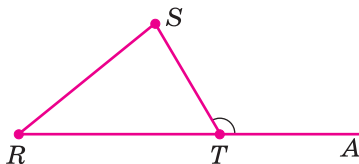


Рис. 254

Установим еще ряд соотношений между элементами треугольника.

Угол, смежный с углом многоугольника, называется **внешним углом многоугольника**.

На рисунке 253 показаны два внешних угла выпуклого пятиугольника $ABCDE$. Понятно, что у этого пятиугольника пять пар внешних углов.

Теорема 9. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних его углов, не смежных с ним.

Доказательство. Пусть угол STA — внешний угол треугольника RST (рис. 254). С одной стороны,

$$\angle STR + \angle STA = 180^\circ,$$

с другой —

$$\angle STR + (\angle TRS + \angle RST) = 180^\circ.$$

Отсюда понятно, что

$$\angle STA = \angle TRS + \angle RST.$$

Б) Мы знаем, что против равных сторон треугольника лежат равные углы, и наоборот, против равных углов лежат равные стороны (рис. 255).

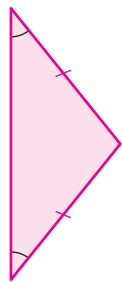


Рис. 255

Теорема 10. Против большей стороны треугольника лежит больший угол. Против большего угла треугольника лежит большая сторона.

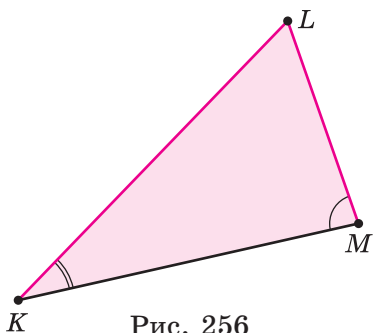


Рис. 256

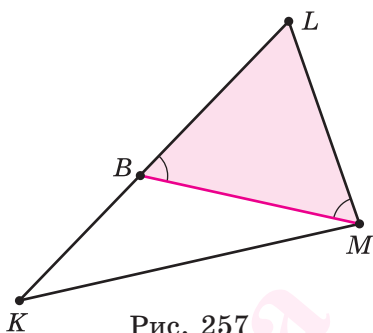


Рис. 257

Доказательство. Пусть в треугольнике KLM сторона KL больше стороны LM (рис. 256). Докажем, что угол LMK больше угла MKL .

На большей стороне LK выберем точку B такую, что $LB = LM$ (рис. 257). Поскольку угол LMB является частью угла LMK , то

$$\angle LMK > \angle LMB.$$

Учитывая, что в равнобедренном треугольнике LMB

$$\angle LMB = \angle LBM,$$

получаем:

$$\angle LMK > \angle LBM. \quad (1)$$

Но угол LBM как внешний угол треугольника KBM равен сумме углов MKB и BMK , и поэтому $\angle LBM > \angle BKM$, или

$$\angle LBM > \angle LKM. \quad (2)$$

Из (2) и (1) получаем, что

$$\angle LMK > \angle LKM.$$

Пусть теперь угол LMK больше угла MKL . Докажем, что сторона KL больше стороны LM .

Длины сторон KL и LM связаны одним из трех отношений:

или $KL < LM$, или $KL = LM$, или $KL > LM$.

Если допустить, что $KL < LM$, то по доказанному получаем, что $\angle MKL > \angle LMK$, но это противоречит условию.

Если допустить, что $KL = LM$, то по теореме 5 получаем, что $\angle MKL = \angle LMK$. Это также противоречит условию.

Остается согласиться с тем, что $KL > LM$.

Таким образом, определенное отношение ($=$, $<$, $>$) между сторонами треугольника влечет за собой такое же отношение между противолежащими углами, и наоборот, определенное отношение между углами треугольника влечет за собой такое же отношение между противолежащими сторонами.

В) Следствие. Гипотенуза прямоугольного треугольника больше его катета.

Доказательство. Пусть EFG является прямоугольным треугольником с прямым углом E (рис. 258). Тогда угол HEF как внешний угол треугольника EFG больше каждого из углов G и F . Поэтому и угол GEF , который равен углу HEF , больше каждого из углов G и F . Значит, по теореме 10 гипотенуза GF больше катета EF и катета EG .

На рисунке 259 точка P соединена с точками A, B, C, D прямой l , при этом $PA \perp l$. Отрезок PA называют *перпендикуляром к прямой l* , проведенным из точки P , остальные отрезки называют *наклонными*

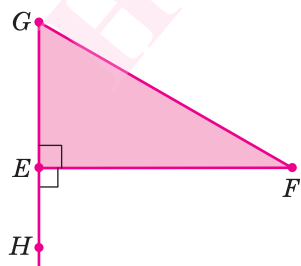


Рис. 258

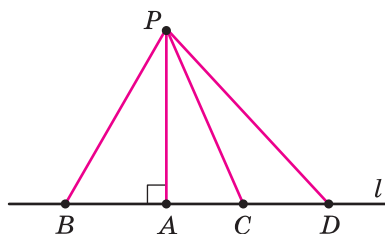


Рис. 259

к прямой. Точку A называют **основанием перпендикуляра**.

В соответствии с доказанным следствием *перпендикуляр к данной прямой, проведенный из данной точки, короче любой наклонной, проведенной из той же точки к той же прямой*.

Длина перпендикуляра, проведенного из точки P к данной прямой l , называется **расстоянием от точки P до прямой l** .

Г) Теорема 11. Если в двух треугольниках углы между соответственно равными сторонами не равны, то против большего угла лежит большая сторона, и наоборот, против большей стороны лежит больший угол.

Доказательство. Пусть у треугольников ABC (рис. 260) и $A_1B_1C_1$ (рис. 261) равны стороны AB и A_1B_1 , BC и B_1C_1 , а угол ABC больше угла $A_1B_1C_1$. Докажем, что $AC > A_1C_1$.

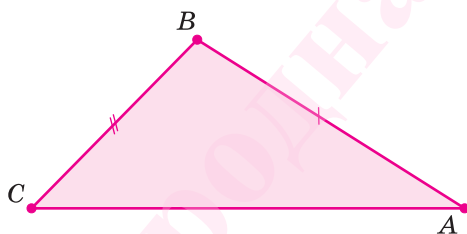


Рис. 260

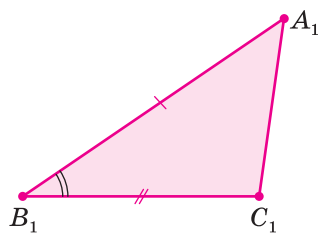


Рис. 261

Наложим треугольник $A_1B_1C_1$ на треугольник ABC так, чтобы совпали вершины B и B_1 , стороны AB и A_1B_1 . Пусть при этом вершина C_1 займет положение C_2 (рис. 262). Проведем биссектрису угла CBC_2 , которая пересекает сторону AC в точке L . Треугольники LBC и LBC_2 имеют общую сторону LB , равные стороны BC и BC_2 и равные углы LBC и LBC_2 . Значит, эти треугольники равны. Поэтому $LC = LC_2$.

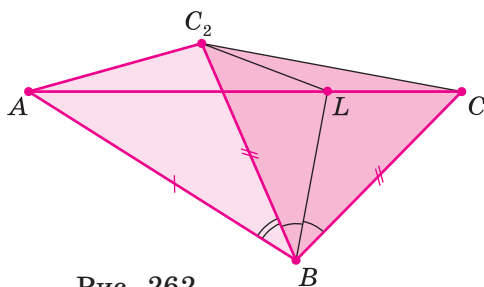


Рис. 262

Поскольку $AL + LC_2 > AC_2$ и $AL + LC_2 = AL + LC = AC$, то $AC > AC_2$. Но $AC_2 = A_1C_1$, значит, $AC > A_1C_1$.

Пусть теперь у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны стороны AB и A_1B_1 , BC и B_1C_1 , но $AC > A_1C_1$. Докажем, что $\angle ABC > \angle A_1B_1C_1$. Допустим, что это не так, т. е. что $\angle ABC \leq \angle A_1B_1C_1$. Если $\angle ABC < \angle A_1B_1C_1$, т. е. $\angle A_1B_1C_1 > \angle ABC$, то по только что доказанному должно быть $A_1C_1 > AC$, что противоречит условию $AC > A_1C_1$. А если $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, и поэтому $AC = A_1C_1$, что снова противоречит условию $AC > A_1C_1$.



1. Дайте словесную формулировку свойства внутренних углов треугольника.
2. Дайте словесную формулировку неравенству треугольника.
3. Какой угол называют внешним углом выпуклого многоугольника?
4. Сформулируйте свойство внешнего угла треугольника.
5. Известно, что две стороны треугольника равны. Что можно сказать о противолежащих этим сторонам углах?
6. Известно, что два угла треугольника равны. Что можно сказать о противолежащих этим углам сторонах?
7. Известно, что одна сторона треугольника больше другой. Что можно сказать о противолежащих этим сторонам углах?

8. Известно, что один угол треугольника больше другого. Что можно сказать о противолежащих этим углам сторонах?
9. Каким соотношением связаны гипотенуза и катет прямоугольного треугольника; перпендикуляр и наклонная к прямой, проведенные из одной точки?
10. Что называют расстоянием от точки до прямой?

390. Могут ли быть сторонами треугольника отрезки с длинами:

- а) 3, 5 и 7; в) 20, 42 и 53;
б) 12, 15 и 27; г) 37, 47 и 85?

391. Стороны KL и KM треугольника KLM равны 5 и 1. Найдите длину третьей стороны, учитывая, что она выражается натуральным числом.

392. Четыре точки A, B, C, D на плоскости расположены так, что $AB = 17$, $BC = 23$, $CD = 32$, $AD = 72$. Сделайте соответствующий рисунок в тетради. Найдите:

- а) AC ; б) BD ; в) $BD + AC$; г) $BD - AC$.

393. Четыре точки P, Q, R, S на плоскости расположены так, что $PQ = 5$, $QR = 6$, $RS = 7$, а $PR + QS \leq 2$. Найдите PS .

394. Одна сторона равнобедренного треугольника равна 15, другая — 7. Какая из них является основанием треугольника?

395. Найдите сторону равнобедренного треугольника, учитывая, что две другие его стороны равны:

- а) 80 и 35; б) 30 и 50; в) 120 и 60.

396. Длины двух отрезков равны x и y . Определите, какой из отрезков длиннее, учитывая, что существует треугольник со сторонами:

- а) $2x + y$, $3x + 5y$ и $2x + 3y$;
 б) $x + 5y$, $3x + 6y$ и $x + 2y$.

397. В каких пределах может изменяться периметр треугольника, две стороны которого равны a и b ?

398. OA , OB , OC — радиусы одной окружности, причем $\angle AOB < \angle COB \leq 180^\circ$ (рис. 263). Докажите, что $AB < CB$.

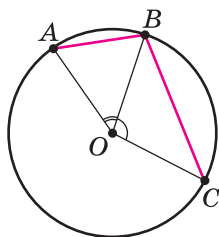


Рис. 263

399. На плоскости построена окружность и выбрана точка K . Найдите такую точку окружности, расстояние от которой до точки K :

- а) наибольшее; б) наименьшее.

400. Найдите углы равнобедренного треугольника, учитывая, что один из его внешних углов равен:

- а) 70° ; б) 110° .

401. Найдите углы при основании равнобедренного треугольника, учитывая, что:

- а) угол против основания в два раза больше угла при основании;
 б) угол при основании в три раза меньше внешнего угла, смежного с ним.

402. Докажите, что если один из внешних углов треугольника в два раза больше угла треугольника, не смежного с ним, то такой треугольник равнобедренный. Сформулируйте обратное утверждение. Истинно ли оно?

403. Может ли быть тупым угол Q треугольника OPQ , если:

- а) $OQ > OP > PQ$; в) $OP = QP < OQ$;
 б) $OQ = PQ < OP$; г) $PO > QO > QP$?

404. Запишите отношения между сторонами треугольника ABC , учитывая, что:

- а) $\angle A < \angle B < \angle C$;
- б) $\angle A = \angle B < \angle C$;
- в) $\angle A < \angle B = \angle C$.

405. Докажите, что в равнобедренном треугольнике отрезок, соединяющий внутреннюю точку основания с противоположной вершиной, короче боковой стороны.

406. Докажите, что медиана треугольника не меньше его высоты, проведенной из той же вершины.

407. Биссектрисы KK_1 и MM_1 равнобедренного треугольника с основанием KM пересекаются в точке A . Докажите, что треугольник KAM равнобедренный.

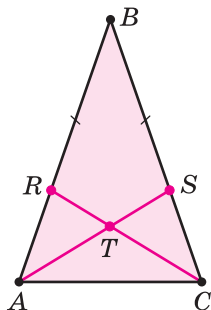


Рис. 264

408. На боковых сторонах BA и BC равнобедренного треугольника ABC отложены равные отрезки BR и BS (рис. 264). Отрезки AS и CR пересекаются в точке T . Докажите, что:

- а) треугольник ATC равнобедренный;
- б) прямая BT — серединный перпендикуляр к отрезку AC .

409. Найдите периметр равнобедренного треугольника, две стороны которого равны:

- а) 46 и 95; б) 46 и 90.

410. Периметр треугольника равен 76, а одна его сторона — 18. Найдите две другие стороны, учитывая, что два внешних угла треугольника при разных вершинах равны друг другу.

411. Периметр равнобедренного треугольника равен 35, один из его внешних углов острый. Найдите

те стороны треугольника, учитывая, что одна из них больше другой на 5.

412. В треугольной пирамиде $SABC$ угол CSA больше угла CAS , а угол CAB больше угла CBA (рис. 265). Сравните углы CSB и CBS .

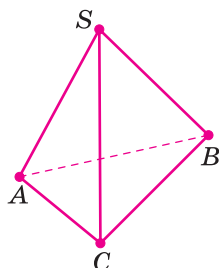


Рис. 265

413. Решите уравнение:

а) $\frac{2x+5}{3} = \frac{3x-8}{6} + \frac{16-7x}{12}$; б) $\frac{z+2}{6} + \frac{3z-4}{10} = \frac{3z+7}{15}$.

414. Определите, при каком значении переменной:

- а) разность выражений $\frac{17-5a}{21}$ и $\frac{-13a+5}{14}$ равна -3 ;
 б) сумма выражений $\frac{43+5x}{12}$ и $\frac{-4x+16}{15}$ равна $4,8$;
 в) сумма выражения $\frac{5-y}{6}$ и удвоенного выражения $\frac{7y-16}{15}$ равна 1 ;
 г) разность удвоенного выражения $\frac{4z+13}{10}$ и выражения $\frac{8z-1}{15}$ равна $1,4$;
 д) разность утроенной суммы выражений $\frac{2c-11}{9}$ и $\frac{36-5c}{12}$ и выражения $\frac{2c+1}{15}$ равна $0,25$;
 е) утроенная разность выражений $\frac{2b+1}{18}$ и $\frac{b+2}{9}$ равна выражению $\frac{5b-4}{16}$.

415. Найдите абсциссу точки пересечения графиков функций:

а) $y = 2x + 7$ и $y = -x + 16$; б) $y = -3x + 1$ и $y = 2x + 9$.

416. Найдите ординату точки пересечения графиков функций:

а) $y = 5x + 7$ и $y = 2x + 16$;

б) $y = -2x + 5$ и $y = 2x + 9$.

417. Найдите координаты точки пересечения графиков функций:

а) $y = -3x + 8$ и $y = -x + 12$;

б) $y = 6x - 13$ и $y = 2x + 11$.

418. Постройте треугольник по координатам его вершин $D(-5; -2)$, $E(-1; 6)$, $F(3; -2)$. Найдите координаты:

а) точек A и B , в которых прямая DE пересекает оси координат;

б) точек M и N , в которых сторона EF пересекает оси координат;

в) точек, в которых прямая FD пересекает оси координат.

419. Найдите середины P , Q , R сторон DE , EF , FD треугольника DEF , построенного при выполнении упражнения 418. Проведите медианы FP , DQ , ER этого треугольника. Найдите координаты:

а) точек P , Q , R и точки G пересечения медиан;

б) точек, в которых медиана FP пересекает оси координат;

в) точек K , L , в которых медиана DQ пересекает оси координат;

г) точек, в которых медиана ER пересекает оси координат.

420. Выпуск продукции на предприятии за прошлый год увеличился на 20 %, а за этот уменьшился на 10 %. Определите, на сколько процентов изменился выпуск продукции за два года.

421. Общий доход фирмы, состоящей из двух предприятий, увеличится на 100 %, если доход первого предприятия увеличится в 3 раза, а доход второго останется неизменным. На сколько процентов должен увеличиться доход второго предприятия, чтобы, не изменяя дохода первого, доход фирмы увеличился в 3 раза?

422. Сколько воды нужно испарить из 500 кг целлюлозной массы, которая содержит 90 % воды, чтобы получить массу с содержанием воды 50 %?

423. Сколько воды нужно долить в 5-процентный раствор, который содержит 40 г соли, чтобы получить 4-процентный раствор?

424. Футбольная команда выиграла в два раза больше матчей, чем сыграла вничью, и не проиграла ни одного матча, набрав при этом 28 очков. Найдите, сколько игр команда сыграла вничью, учитывая, что победа и ничья оцениваются соответственно в 3 и 1 очко.

425. Вика купила 11 пирожных и шоколадок вместе, за пирожные заплатила 36 000 р., а за шоколадки — 45 000 р. Учитывая, что цена пирожного и цена шоколадки относятся как 2 : 3, найдите эти цены.

426. Вика купила пирожные и шоколадки, за пирожные заплатила 70 000 р., за шоколадки — 44 000 р., а суммарная цена одного пирожного и шоколадки равна 18 000 р. Учитывая, что количество пирожных и количество шоколадок относятся как 5 : 2, найдите эти количества.

* * *

427. Найдите все правильные дроби, разность которых равна $\frac{1}{35}$.

428. Докажите, что если при целых значениях переменных a и b значение выражения $a^2 - b^2$ делится на 7, то на 7 делится и значение выражения $a^2 - 5ab + b^2$ или значение выражения $a^2 + 5ab + b^2$.

429. Среди монет достоинством в 1, 2, 3 и 5 талеров есть одна фальшивая, которая отличается от настоящих массой. Как с помощью двух взвешива-

ний на чашечных весах найти фальшивую монету, если настоящие монеты в 1, 2, 3 и 5 талеров имеют массы соответственно 1, 2, 3 и 5 г?

13. Прямоугольный треугольник

А) В треугольнике два угла обязательно острые. А третий, больший, угол может быть и тупым, и острым, и прямым.

Если у треугольника больший угол тупой, то он называется *тупоугольным* (рис. 266), если больший угол острый, то *остроугольным* (рис. 267), а если больший угол прямой, то *прямоугольным* (рис. 268).

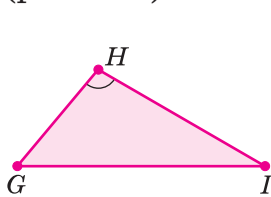


Рис. 266

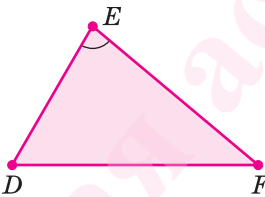


Рис. 267

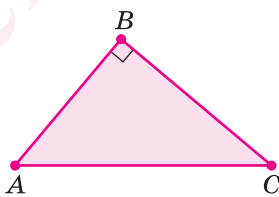


Рис. 268

Рассмотрим некоторые свойства *прямоугольного треугольника*.

Теорема 12. В прямоугольном треугольнике острые углы вместе составляют 90° .

Доказательство. Пусть в треугольнике PQR угол R прямой (рис. 269). Тогда величина угла R равна 90° . Поскольку сумма углов P , Q , R треугольника PQR равна 180° , то два острых угла P и Q этого треугольника вместе составляют $180^\circ - 90^\circ$, т. е. 90° .

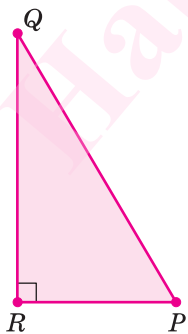


Рис. 269

Б) Теорема 13. Если катет прямоугольного треугольника лежит против угла в 30° , то он равен половине гипотенузы.

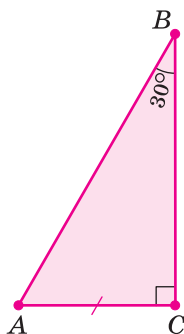


Рис. 270

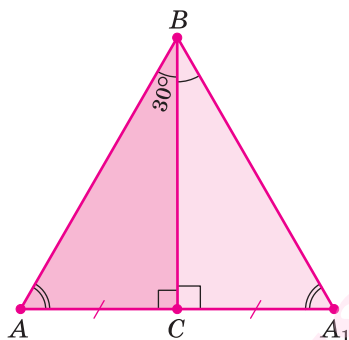


Рис. 271

Доказательство. Пусть в прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, а угол B равен 30° (рис. 270). Тогда, учитывая теорему 12, получаем, что $\angle A = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

Построим треугольник A_1BC , симметричный треугольнику ABC относительно катета BC (рис. 271). Поскольку треугольники A_1BC и ABC равны, то $\angle BA_1C = \angle BAC = 60^\circ$, $\angle A_1BC = \angle ABC = 30^\circ$. Поэтому $\angle ABA_1 = 60^\circ$. Получается, что в треугольнике ABA_1 углы AA_1B и ABA_1 равны. Поэтому по теореме 4 параграфа 10 этот треугольник является равнобедренным с основанием A_1B . Значит, $AA_1 = AB$. Но $AC = \frac{1}{2}AA_1$. Значит, $AC = \frac{1}{2}AB$.

В) Теорема 14. Если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30° .

Доказательство. Пусть в прямоугольном треугольнике MNP угол P прямой, а катет MP равен половине гипотенузы MN (рис. 272).

Построим треугольник M_1NP , симметричный треугольнику MNP относи-

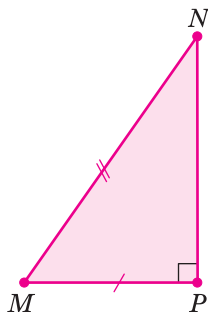


Рис. 272

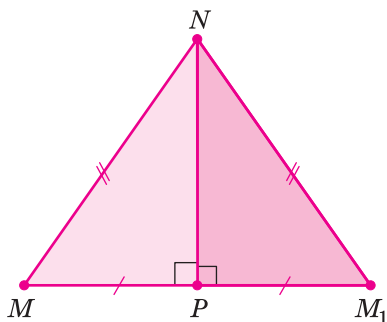


Рис. 273

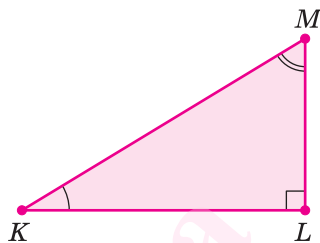


Рис. 274

тельно катета NP (рис. 273). Получим равносторонний треугольник MNM_1 (объясните почему). В нем $\angle MNM_1 = 60^\circ$. Значит, $\angle MNP = \frac{1}{2} \angle MNM_1 = 30^\circ$.

Г) Рассмотрим некоторые *признаки прямоугольного треугольника*.

Теорема 15. *Если сумма двух углов треугольника равна 90° , то этот треугольник прямоугольный.*

Доказательство. Пусть в треугольнике KLM углы K и M вместе составляют 90° (рис. 274). Тогда величина третьего угла L равна $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Значит, треугольник KLM является прямоугольным.

Теорема 16. *Если одна из медиан треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то этот треугольник является прямоугольным.*

Доказательство. Пусть SS_1 — медиана треугольника RST , равная половине стороны RT , к которой проведена (рис. 275).

По свойству углов треугольника получим:

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ. \quad (1)$$

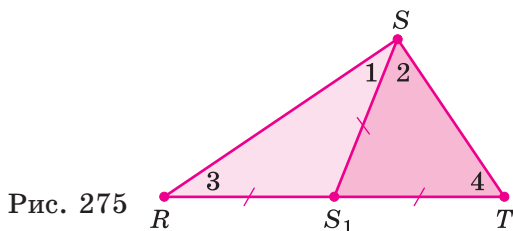


Рис. 275

Поскольку треугольники RS_1S и SS_1T равнобедренные с основаниями RS и ST соответственно, то

$$\angle 1 = \angle 3 \text{ и } \angle 2 = \angle 4.$$

Заменив в равенстве (1) углы 3 и 4 равными им углами 1 и 2 соответственно, получим:

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ,$$

или

$$2 \cdot (\angle 1 + \angle 2) = 180^\circ,$$

или

$$\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ.$$

Мы доказали, что угол RST равен 90° . Поэтому треугольник RST является прямоугольным.

Д) Докажем признаки равенства прямоугольных треугольников.

Поскольку прямые углы равны друг другу, то первый и второй признаки равенства треугольников позволяют сформулировать следующие признаки.

Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого, то такие треугольники равны.

Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему углу другого, то такие треугольники равны.

Теорема 17. а) Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники равны.

б) Если катет и противолежащий острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и противолежащему углу другого, то такие треугольники равны.

Доказательство. а) Пусть у прямоугольных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны гипотенузы AC и A_1C_1 , а также углы A и A_1 (рис. 276).

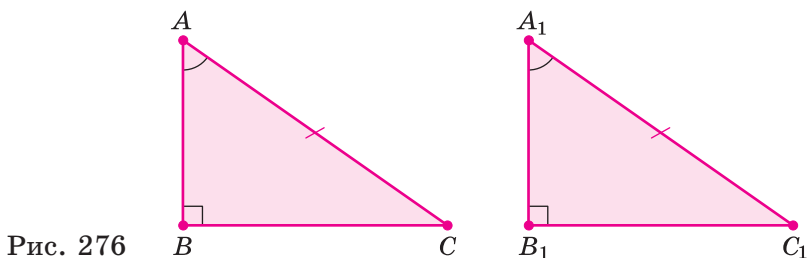


Рис. 276

В соответствии с теоремой 12 у этих треугольников равны друг другу и углы C и C_1 . Получается, что у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны гипотенузы AC и A_1C_1 , прилежащие к ним углы A и A_1 , а также углы C и C_1 . Поэтому эти треугольники равны по второму признаку равенства треугольников.

Утверждение б) докажите самостоятельно.

Теорема 18. *Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны.*

Доказательство. Пусть у треугольников LMN и $L_1M_1N_1$ равны гипотенузы MN и M_1N_1 , а также катеты LM и L_1M_1 (рис. 277).

Отразим треугольник LMN симметрично относительно катета LN , а треугольник $L_1M_1N_1$ относительно катета L_1N_1 . В результате получаем треугольники MNK и $M_1N_1K_1$ (рис. 278). У них стороны MN и M_1N_1 равны по условию; стороны NK и N_1K_1 равны, поскольку они соответственно равны сторонам MN

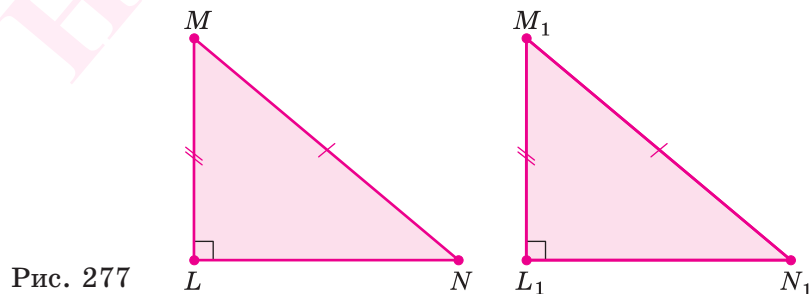


Рис. 277

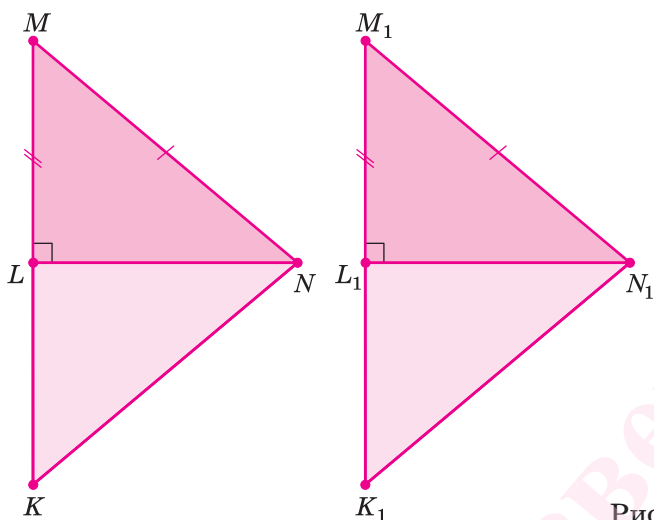


Рис. 278

и M_1N_1 ; стороны MK и M_1K_1 равны, поскольку они в два раза больше равных по условию сторон ML и M_1L_1 . Поэтому треугольники MNK и $M_1N_1K_1$ равны по трем сторонам. Отсюда следует равенство углов M и M_1 . Значит, треугольники LMN и $L_1M_1N_1$ равны по двум сторонам и углу между ними.

1. Какой треугольник называется прямоугольным; остроугольным; тупоугольным?
2. Какая сторона прямоугольного треугольника называется гипотенузой? Какие стороны прямоугольного треугольника называются катетами?
3. Сформулируйте свойство острых углов прямоугольного треугольника.
4. Сформулируйте свойство катета прямоугольного треугольника, лежащего против угла в 30° .
5. Сформулируйте свойство угла прямоугольного треугольника против катета, равного половине гипотенузы.
6. Сформулируйте признак прямоугольного треугольника по сумме его острых углов.
7. Сформулируйте признак прямоугольного треугольника по медиане, проведенной к одной из сторон.
8. Сформулируйте признак равенства прямоугольных треугольников по катетам.

9. Сформулируйте признак равенства прямоугольных треугольников по катету и прилежащему острому углу.
10. Сформулируйте признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу.
11. Сформулируйте признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету.

430. Докажите, что если биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника перпендикулярна гипотенузе, то такой треугольник равнобедренный.

431. Найдите острые углы прямоугольного треугольника, если один из них:

- а) на 20° больше второго;
- б) в пять раз меньше второго;
- в) составляет $\frac{2}{3}$ второго;
- г) составляет 150 % второго.

432. AA_1 является высотой равнобедренного треугольника ABC с основанием AC . Найдите углы треугольника AA_1C , учитывая, что угол B равен 62° .

433. Углы треугольника относятся как $5 : 7 : 12$. Докажите, что этот треугольник прямоугольный, и найдите его острые углы.

434. Вершины треугольника лежат на одной окружности, и одна из его сторон является диаметром. Докажите, что этот треугольник прямоугольный.

435. Один из углов прямоугольного треугольника равен 60° , а разность между гипотенузой и меньшим катетом равна 6 см. Найдите эти стороны.

436. На рисунке 279 $AN = BM$, $\angle AMN = \angle BNM = 90^\circ$. Докажите, что:

- а) $AM = BN$;
- б) треугольник MQN равнобедренный;
- в) треугольник AQM равнобедренный;
- г) $\triangle AQM = \triangle BQN$.

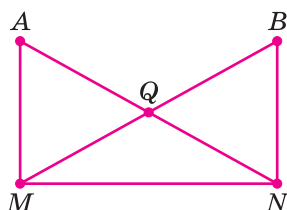


Рис. 279

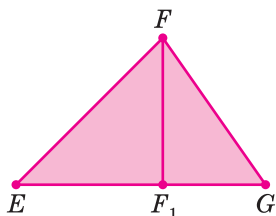


Рис. 280

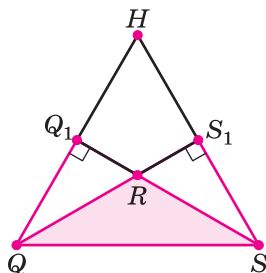


Рис. 281

437. Высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, равна 4 дм, а боковая сторона — 80 см. Найдите углы треугольника.

438. Высота FF_1 треугольника EFG , проведенная из угла в 75° , разделяет сторону EG на части, одна из которых F_1G равна 5 м, а другая F_1E — высоте FF_1 (рис. 280). Найдите остальные углы треугольника EFG , учитывая, что $FG = 10$ м.

439. Докажите, что высоты равнобедренного треугольника, проведенные к боковым сторонам, равны друг другу.

440. Докажите, что если в треугольнике две высоты равны, то он равнобедренный.

441. Высоты QQ_1 и SS_1 к боковым сторонам тупоугольного равнобедренного треугольника QRS продлены до их взаимного пересечения в точке H (рис. 281). Найдите углы треугольника QRS , учитывая, что угол QHS равен 80° .

442. Отрезки TA и TB — соответственно биссектриса и высота, проведенные к боковой стороне UV равнобедренного треугольника TUV . Найдите углы треугольника TAB , учитывая, что угол U против основания треугольника равен 100° .

443. На сторонах угла A выбраны точки B и C так, что $AB = AC$. Прямые, проходящие через точки B и C перпендикулярно сторонам угла, пересекаются в точ-

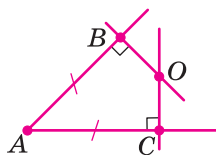


Рис. 282

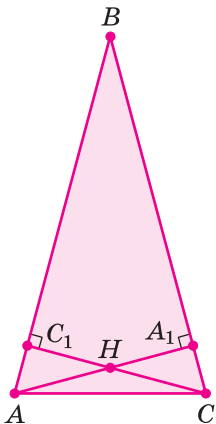


Рис. 283

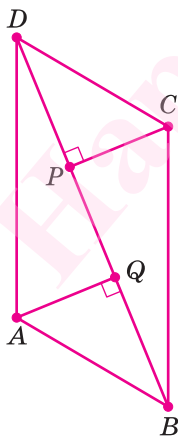


Рис. 284

ке O (рис. 282). Докажите, что луч AO является биссектрисой угла A .

444. Докажите, что:

- если точка принадлежит биссектрисе угла, то она равноудалена от сторон этого угла;
- если точка равноудалена от сторон угла, то она принадлежит биссектрисе этого угла.

445. Докажите, что если два угла и высота, проведенная из одного из этих углов, одного треугольника соответственно равны двум углам и высоте другого треугольника, то такие треугольники равны.

446. Высоты AA_1 и CC_1 , проведенные к боковым сторонам остроугольного равнобедренного треугольника ABC , пересекаются в точке H (рис. 283). Найдите углы треугольника ABC , учитывая, что угол AHC равен 150° .

447. На рисунке 284 $AB = CD$, $AD = BC$, $\angle AQB = \angle CPD = 90^\circ$. Докажите, что $AQ = CP$.

448. В прямоугольном треугольнике с острым углом в 30° проведена высота к гипотенузе, равной 20 см. Найдите отрезки, на которые эта высота делит гипотенузу.

449. Раскройте скобки и найдите значение выражения:

- $1,2 + (3,4 - 5,9)$;
- $-7,95 + (-2,59 + 2,11)$;

- в) $7,9 + (3,6 - 5,1 + 5,7)$;
 г) $(5,71 - 3,97) + (5,01 - 3,99)$;
 д) $6,3 - (6,1 - 5,2 - 1,5)$;
 е) $(4,61 - 5,9) - (8,88 - 4,97)$;
 ж) $-9,7 - (5,21 - 2,91 - 10)$;
 з) $(5,78 - 9,09) - (6,67 + 5,31)$.

450. Степенью с основанием 5 запишите число:

- а) 25^3 ; г) 125^7 ; ж) 3125^4 ; к) 625^{39} ;
 б) 25^5 ; д) 625^2 ; з) 3125^8 ; л) $15\,625^3$;
 в) 125^4 ; е) 625^6 ; и) 125^i ; м) 3125^{51} .

451. Найдите значение выражения:

- а) $2^7 \cdot 5^5$; д) $50^6 \cdot 0,2^8$; и) $22,8^8 \cdot \left(\frac{25}{57}\right)^7$;
 б) $4^5 \cdot 25^3$; е) $(-20)^{15} \cdot 0,05^{13}$; к) $5,875^{17} \cdot \left(\frac{8}{47}\right)^{19}$;
 в) $8^5 \cdot 125^4$; ж) $\left(\frac{2}{3}\right)^{13} \cdot 1,5^9$; л) $\left(\frac{8}{53}\right)^{19} \cdot 6,625^{17}$;
 г) $0,2^5 \cdot 5^8$; з) $\left(\frac{5}{9}\right)^{14} \cdot 1,8^{15}$; м) $\left(\frac{125}{147}\right)^9 \cdot 1,176^{10}$.

452. При перевозке брикета две автомашины сделали по 5 рейсов. Найдите отношение грузоподъемностей автомашин, учитывая, что первая автомашина перевезла бы 75 % этого брикета за 15 рейсов.

453. Рожью занято 65 % площади первого поля и 45 % площади второго. Найдите, какую часть всей засеянной площади составляет первое поле, учитывая, что рожью занято 53 % площади обоих полей.

454. Два завода вместе за месяц должны были сделать 360 станков. Поскольку первый завод выполнил план на 112 %, а второй — на 110 %, то за месяц вместе заводы изготовили 400 станков. Найдите план выпуска станков для каждого завода.

455. При переработке нектара цветов в мед пчелы уменьшают в нем содержание воды. Найдите,

сколько килограммов нектара нужно переработать пчелам для получения 1 кг меда, учитывая, что нектар содержит 70 % воды, а полученный из него мед — 17 %.

456. В магазине купили тетради и карандаши, причем за тетради уплатили на 12 500 р. больше. Цены тетради и карандаша соответственно равны 2500 р. и 1250 р. Найдите, сколько купили тетрадей и сколько карандашей, учитывая, что их вместе оказалось 8.

457. Первый рабочий изготовил 72 детали, второй — 60 деталей, причем первый рабочий работал на 3 ч больше. Найдите производительности первого и второго рабочих, учитывая, что они относятся как 3 : 4.

458. Первый рабочий изготовил 66 деталей, второй — 32 детали, причем производительность первого рабочего на 3 детали в час больше производительности второго. Найдите время работы каждого рабочего, учитывая, что время работы первого рабочего относится ко времени работы второго как 3 : 2.

* * *

459. Как разрезать квадрат на пять прямоугольников так, чтобы у соседних прямоугольников стороны не совпадали?

460. В каждом из чисел 1, 2, 3, ..., 200 520 062 007 подсчитывается сумма цифр, у полученных чисел снова подсчитывается сумма цифр и т. д., пока не получатся однозначные числа. Каких чисел получится больше: 3 или 8? Обоснуйте свой ответ.

461. Если последнюю цифру числа, которое начинается цифрой 1, перенести в его начало, то получится вдвое большее число. Найдите наименьшее из таких чисел.

IV

раздел

Многочлены

14. Одночлены

А) Произведение чисел, переменных и их степеней называют **одночленом**.

Так, выражения abc , $4y^3$, $\left(-\frac{3}{7}\right)k^5l$, $\frac{5}{6}b^2(-3)xz$ являются одночленами, а выражения $\frac{3a}{xy}$ и $4 - 3r$ одночленами не являются.

Одночленами считают также отдельные числа, переменные и их степени. Например, выражения $4, 7; p; 4^3; x^6$ — одночлены.

Одночлен $2x^2(-5)xy^4$ можно упростить, если использовать переместительное и сочетательное свойства умножения и правило умножения степеней:

$$\begin{aligned} 2x^2(-5)xy^4 &= 2 \cdot (-5)x^2xy^4 = \\ &= -10x^3y^4. \end{aligned}$$

Одночлен $-10x^3y^4$ является произведением числового множителя, записанного первым, и степеней различных переменных. Такую запись одночлена называют его **стандартным видом** (рис. 285).

Любой одночлен можно записать в стандартном виде.

Стандартный вид
одночлена

$$\underbrace{-10x^3y^4}_{\substack{\text{Коэффициент} \\ \text{Произведение степеней} \\ \text{разных переменных}}}$$

Рис. 285

Числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде, называют **коэффициентом одночлена**. Коэффициентом одночлена $-3\frac{5}{9}a^5y^2$ является число $-3\frac{5}{9}$.

Поскольку $ax^2 = 1 \cdot ax^2$, то коэффициентом одночлена ax^2 является число 1, а поскольку $-cx^5 = -1 \cdot cx^5$, то коэффициент одночлена $-cx^5$ равен -1 .

Сумму показателей степеней всех переменных одночлена называют **степенью одночлена**. Например, степень одночлена $5a^2by^4$ равна $2 + 1 + 4 = 7$, а степень одночлена $-3,8s^6$ равна 6. Если одночлен является не равным нулю числом, то его степень считают равной нулю. Степень нуля как одночлена не определяют.

Б) Пример 1. Найдем произведение одночленов a^2 и a^4 . Для этого используем правило умножения степеней с одинаковыми основаниями, в соответствии с которым основание степени остается прежним, а показателем степени является сумма показателей степеней множителей. Значит, $a^2 \cdot a^4 = a^6$.

Пример 2. Найдем произведение одночленов $3a^2xt^3$ и $-4a^2r^2t$.

Используя переместительное и сочетательное свойства умножения и правила умножения степеней с одинаковыми основаниями, получим:

$$(3a^2xt^3) \cdot (-4a^2r^2t) = (3 \cdot (-4))(a^2a^2)r^2(t^3t)x = -12a^4r^2t^4x.$$

Видим, что произведение одночленов есть одночлен.

Чтобы перемножить одночлены, нужно перемножить коэффициенты, а показатели степеней одинаковых переменных сложить (рис. 286).

В) Напомним правила возведения в степень произведения и степени.

Чтобы возвести в степень произведение, нужно в эту степень возвести каждый множитель и результаты перемножить.

$$(-4m^3n^2) \cdot 5m^2n^4 = -20m^5n^6.$$

Рис. 286

Чтобы возвести степень в степень, нужно основание оставить прежним, а показатели перемножить.

Пример 3. Возведем в четвертую степень одночлен $3i^2jk^3$. Для этого используем правила возведения в степень произведения и степени:

$$(3i^2jk^3)^4 = 3^4(i^2)^4j^4(k^3)^4 = 81i^8j^4k^{12}.$$

Степень одночлена есть одночлен.

Чтобы возвести в степень одночлен, нужно возвести в эту степень каждый из множителей (рис. 287).

$$(-3c^5d^3)^4 = (-3)^4(c^5)^4(d^3)^4.$$

Рис. 287

- ?**
1. Как определяется: натуральная степень числа, большая единицы; первая степень числа; нулевая степень числа; целая отрицательная степень числа?
 2. Что называют одночленом?
 3. Какую запись одночлена называют его стандартным видом?
 4. Какое число называют коэффициентом одночлена?
 5. Какое число называют степенью одночлена?
 6. Сформулируйте правило умножения одночленов.
 7. Чем является произведение одночленов; степень одночлена?
 8. Сформулируйте правило возведения в степень произведения.
 9. Сформулируйте правило возведения степени в степень.
 10. Сформулируйте правило возведения одночлена в степень.

462. Из выражений $3abc$, $2ax^3$, $-4a^2b^2t + 1$, $3a^2x + t^3$, -4 , $a^2x^2 : t$, $3(a^2 + b^2)$, x^2y^3z , $5 - ab^2c^4$ выпишите те, которые являются одночленами.

463. Укажите коэффициент и степень одночлена:

- а) $2xbz$; в) $-a^3b^2c$; д) $5a^2xy^3$; ж) $-5xy^2z^4$;
б) $-3ab^2$; г) 1 ; е) x^2y^3z ; з) $-p$.

464. Найдите значение одночлена при указанных значениях переменных:

- а) $-m^2n^3$ при $m = 2$, $n = -1$;
б) $5a^2bx$ при $a = -2$, $b = -1$, $x = 0$;
в) x^2y^3z при $x = 2$, $y = \frac{1}{2}$, $z = -2$.

465. По словесной формулировке запишите выражение и определите, является ли оно одночленом:

- а) утроенное произведение чисел a и b ;
б) две трети произведения квадрата числа x и четвертой степени числа y ;
в) учетверенное произведение числа c и числа, на 7 большего;
г) увеличенное в пять раз произведение числа k и числа, в два раза большего;
д) произведение куба числа h и квадрата числа, в полтора раза меньшего;
е) количество секунд в t часах;
ж) количество секунд в сутках;
з) количество квадратных метров в гектаре;
и) количество квадратных метров в n гектарах;
к) количество кубических метров в кубическом километре;
л) количество кубических метров в k кубических километрах.

466. Представьте одночленом и назовите коэффициент выражения (рис. 288):

$$\begin{array}{llll} \text{а) } \frac{5h}{4}; & \text{в) } \frac{w}{3}; & \text{д) } \frac{3ab}{-2}; & \text{ж) } \frac{7,2m^2n}{18}; \\ \text{б) } -\frac{r}{14}; & \text{г) } \frac{2a^2c}{7}; & \text{е) } \frac{-7s^2t^3}{-21}; & \text{з) } \frac{-12,3l}{42}. \end{array}$$

$$\frac{5,6m^2n^3}{2,1} = \frac{8m^2n^3}{3} = \frac{8}{3}m^2n^3 = 2\frac{2}{3}m^2n^3;$$

$2\frac{2}{3}$ — коэффициент.

Рис. 288

467. В стандартном виде представьте одночлен:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } -2,8qq^3q; & \text{ж) } 10i^3j \cdot (7,1j^4); \\ \text{б) } 25ef \cdot 0,2f; & \text{з) } -5as^4 \cdot (-0,6)rs \cdot \frac{2}{3}ar^3; \\ \text{в) } -6rs \cdot (-3,5)r^2; & \text{и) } 12f^2g \cdot (-0,5eg) \cdot \frac{5}{6}fg^2; \\ \text{г) } -4t^2a \cdot \frac{2}{3}bt^3; & \text{к) } 3^2kl^3 \cdot (-4)^2l^2k^2; \\ \text{д) } 0,35yx^2 \cdot 4xy^2; & \text{л) } 25x^2z^3 \cdot 5^2xz^7; \\ \text{е) } -5u^3w \cdot \frac{2}{15}a^2u^2; & \text{м) } \frac{5}{6}g^5h \cdot \frac{2}{13}gh^4. \end{array}$$

468. Найдите значение одночлена (рис. 289):

$$\begin{array}{l} \text{а) } \frac{2}{9}x(-0,3)y \text{ при } x=5 \text{ и } y=3; \text{ при } x=21 \text{ и } y=\frac{5}{7}; \\ \text{б) } \frac{5}{6}ab^2\frac{18}{25}a^2b \text{ при } a=\frac{1}{7} \text{ и } b=7; \text{ при } a=\frac{2}{3} \text{ и } b=-5. \end{array}$$

$$\frac{2}{3}x(-0,1)y = \frac{2}{3}(-0,1)xy = -\frac{1}{15}xy;$$

$$x = \frac{9}{11}; y = 25;$$

$$-\frac{1}{15} \cdot \frac{9}{11} \cdot 25 = -\frac{\overset{3}{9} \cdot \overset{5}{25}}{\underset{1}{15} \cdot 11} = -\frac{15}{11} = -1\frac{4}{11}.$$

Рис. 289

469. Назовите степень и коэффициент одночлена:

- а) $5a^3b^2$; в) $-r^2st^4$; д) $\frac{7}{34}ij^2k^3l^4$; ж) $3,1$;
б) $-\frac{5}{9}xyz$; г) $2,7a^3q^7$; е) $-13n^{11}$; з) w .

470. Степенью с основанием 3 запишите число:

- а) 9^2 ; в) 27^4 ; д) 81^3 ; ж) 243^4 ; и) 81^n ;
б) 9^4 ; г) 27^6 ; е) 81^5 ; з) 243^8 ; к) 81^{5m} .

471. Возведите в степень:

- а) $(z^2)^3$; в) $(a^3)^6$; д) $(b^7)^4$; ж) $(j^{10})^3$;
б) $(z^3)^2$; г) $(d^5)^4$; е) $(f^4)^7$; з) $(r^8)^9$.

472. Упростите выражение:

- а) $a^3(a^2)^4$; г) $(d^2)^5(d^5)^2$; ж) $((g^2)^3)^4$;
б) $(b^3)^2b^6$; д) $(e^4e^6)^9$; з) $((h^2)^3h^2)^4$;
в) $(c^4)^5(c^6)^2$; е) $(f^8 : f^6)^{11}$; и) $x(x^3)^2(x^2)^3$.

473. Найдите произведение одночленов:

- а) $(2xy^2) \cdot (3x^3)$; г) $(2cxy^2) \cdot (-x^2y^2)$;
б) $(-ay^2) \cdot (2ax)$; д) $(-6cx^2) \cdot (3ay)$;
в) $(5mk) \cdot (-2k^2m)$; е) $(7x^5y^2) \cdot (8x^2y^3)$.

474. Выполните умножение:

- а) $(-5q^2rv^5) \cdot (32q^5v^4v^6)$;
б) $(-70u^4w^2x^4) \cdot (-0,01w^3x^2u^6)$;
в) $\left(\frac{3}{4}a^3b^2y\right) \cdot \left(-\frac{4}{9}y^2a^3b\right)$;
г) $\left(-\frac{4}{3}d^3x^2y\right) \cdot \left(-\frac{9}{4}d^4x^4y^3\right)$;
д) $\left(-\frac{5}{6}f^2g^3h^5\right) \cdot \left(-\frac{18}{25}h^2f^3g^5\right)$;
е) $\left(-\frac{2}{5}a^6x^2y^3\right) \cdot \left(-\frac{25}{26}x^2a^4y^7\right)$;
ж) $(-0,6d^2h^4f^3) \cdot (-3,2d^6f^5h^5)$;
з) $(3,1r^3t^3i^6) \cdot (-3i^2rt^2)$;
и) $\left(1\frac{2}{3}p^4k^6n^2\right) \cdot \left(-1\frac{1}{5}pk^9r^7\right)$;

$$\kappa) \left(-\frac{5}{12}u^6v^5w^4\right) \cdot (2,4v^3wa^5);$$

$$\text{л)} (-0,28a^9b^8i^7) \cdot \left(\frac{5}{21}b^6i^5k^4\right);$$

$$\text{м)} \left(-\frac{5}{8}u^5y^2a^3\right) \cdot (-1,6v^{11}u^{12}a^3).$$

475. Одночлен $-18k^4l^5$ выразите произведением:

а) двух одночленов стандартного вида;

б) трех одночленов стандартного вида;

в) четырех одночленов стандартного вида (рис. 290).

$$-18k^4l^5 = (-2k^3l)(-3l^2)(-kl)(3l).$$

$$-18k^4l^5 = (-k^2l)(9l^2)(2k)(kl^2).$$

Рис. 290

476. Возведите одночлен:

а) $3a^2b^7$ в квадрат;

б) $-pq^5$ в куб;

в) $\frac{1}{3}i^3vw^5$ в пятую степень;

г) $-\frac{2}{3}ax^3y^2$ в четвертую степень;

д) $-0,1a^2c^5z$ в шестую степень;

е) $-mn^5k^3$ в седьмую степень.

477. Выразите одночленом стандартного вида выражение:

$$\text{а)} (-5a^2b^9c^4)^4; \quad \text{е)} \left(-3\frac{1}{4}t^2u^7v^3\right)^2;$$

$$\text{б)} (10de^{11}fg^7)^5; \quad \text{ж)} \left(\frac{2w^3xy^2z}{3}\right)^4;$$

$$\text{в)} (1,3h^3i^5j^7k^9)^3; \quad \text{з)} \left(5 \cdot \frac{-3c^3d^4f^2}{15}\right)^5;$$

$$\text{г)} \left(1\frac{1}{2}l^3m^4n^8o^2\right)^4; \quad \text{и)} \left(-8 \cdot \frac{7ij^6k^5}{28}\right)^6;$$

$$\text{д)} \left(-2\frac{1}{3}p^6q^5r^2s\right)^3; \quad \text{к)} \left(-1\frac{3}{5}x^2y^3\right)^2.$$

478. Упростите выражение:

- а) $(2s^2)^2 \cdot (-5s)$; д) $\left(-3\frac{2}{3}h^3\right)^3 \cdot \left(-\frac{9}{11}h^7\right)$;
 б) $4d \cdot (0,5d^6)^3$; е) $-0,8(uv)^7 \cdot (0,5u^2v)^3$;
 в) $-0,001f^5 \cdot (10f^3)^5$; ж) $\left(2\frac{1}{4}i^2j\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}ij^2\right)^2$;
 г) $\frac{9}{25}g^9 \cdot \left(-1\frac{2}{3}g^3\right)^5$; з) $\left(-1\frac{3}{5}x^2y^3\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}ax^3\right)^3$.

479. Упростите и найдите значение выражения:

- а) $\frac{2}{3}kl^2 \cdot 0,75k^2lm^3$ при $k = \frac{3}{7}$, $l = \frac{3}{2}$, $m = 6$;
 б) $-8xy \cdot 0,125xy^2z^3$ при $x = -2$, $y = -18$, $z = -\frac{1}{9}$;
 в) $\frac{2}{7}a^2b \cdot 14ab^2c$ при $a = 7$, $b = \frac{1}{7}$, $c = -\frac{1}{6}$ (рис. 291).

$$\begin{aligned} \frac{2}{7}a^2b \cdot 14ab^2c &= \left(\frac{2}{7} \cdot 14\right)(a^2a)(bb^2)c = 4a^3b^3c; \\ a &= \frac{1}{4}; \quad b = -3; \quad c = 16; \\ 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot (-3)^3 \cdot 16 &= \frac{4 \cdot (-3)^3 \cdot 4^2}{4^3} = -27. \end{aligned}$$

Рис. 291

480. Вычислите:

- а) $\frac{2^7 \cdot 3^{10}}{2^6 \cdot 3^8}$; в) $\frac{14^4}{2^3 \cdot 7^3}$; д) $\frac{10^7}{2^3 \cdot 5^3}$;
 б) $\frac{2^8 \cdot 3^8}{6^5}$; г) $\frac{4^5 \cdot 3^5}{12^3}$; е) $\frac{4^{10} \cdot 3^{10}}{12^{10}}$.

481. Произведением степеней простых чисел выразите число (рис. 292):

- а) 224; в) 306; д) 846;
 б) 264; г) 750; е) 966.

$$884 = 2^2 \cdot 13 \cdot 17.$$

884	2
442	2
221	13
17	17
1	

Рис. 292

482. Решите уравнение:

а) $1 - 2,6x - (0,7x + 3) = 5,7$;

б) $2\frac{1}{3}a - \frac{5}{6} = 3\frac{1}{6}a + \frac{2}{3}$;

в) $7 - 0,5z = 0,2z - 35$;

г) $4\frac{1}{7} + \left(2\frac{1}{3}y - 5\frac{2}{7}\right) = 3\frac{5}{6}y - \frac{1}{7}$.

483. Одна насечка напильника образует с его ребром угол 30° , другая — 80° (рис. 293). Найдите угол между насечками.

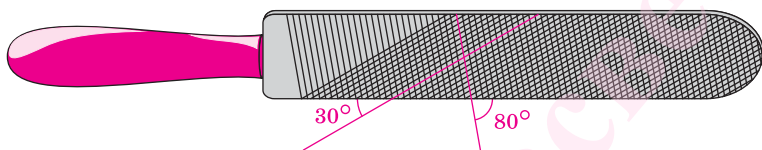


Рис. 293

484. Найдите углы между прямыми a и c , a и d , b и c , b и d , c и d на рисунке:

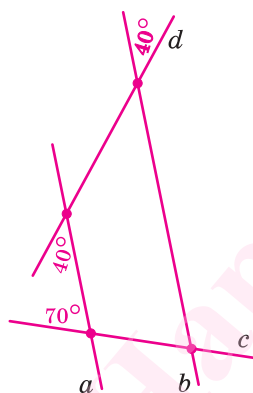


Рис. 294

а) 294; б) 295.

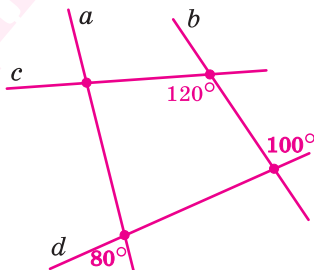


Рис. 295

485. Постройте четырехугольник, вершины которого расположены в точке $M(3; -4)$ и точках, симметричных ей относительно осей координат и начала координат. Какой четырехугольник получился? Найдите его площадь и периметр. В какой точке пересекаются его диагонали?

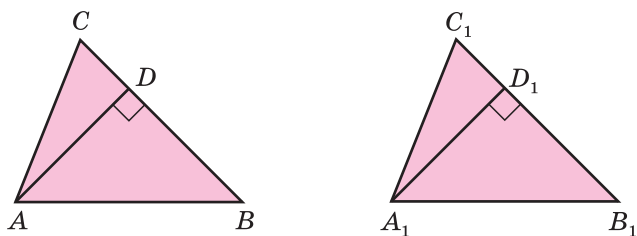


Рис. 296

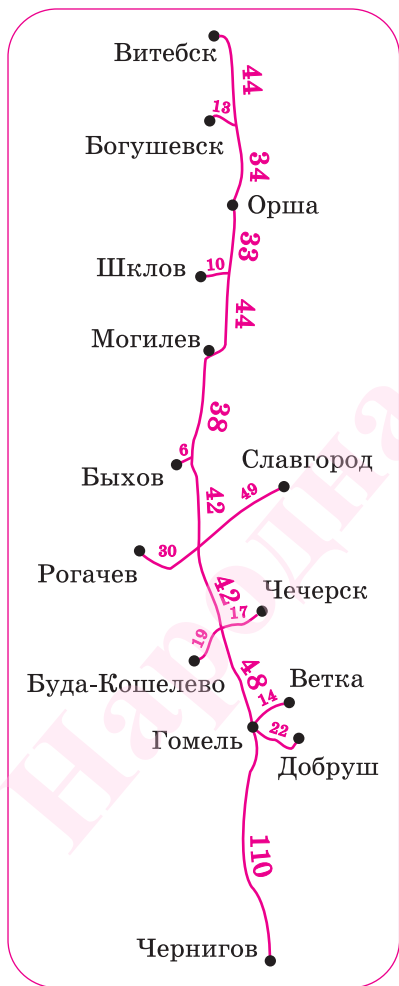


Рис. 297

486. Есть два равных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 296). Докажите, что у них равны высоты AD и A_1D_1 , проведенные к соответствующим сторонам BC и B_1C_1 .

487. Осиповичи, Татарка, Елизово — самые большие населенные пункты Осиповичского района. Количество жителей Елизово на 0,2 тыс. человек больше утроенного количества жителей Татарки, а вместе в этих населенных пунктах живет 3,8 тыс. человек. Найдите количества жителей Осиповичей, Татарки, Елизово, учитывая, что общее количество жителей в этих населенных пунктах относится к количеству жителей Татарки как $127 : 9$.

488. Из Могилева и Рогачева в Гомель (рис. 297)

одновременно выехали две машины со скоростями 73 км/ч и 50 км/ч соответственно. Через какое время расстояние, которое останется проехать могилевской машине, станет в 1,2 раза больше расстояния, которое нужно будет проехать рогачевской машине?

489. Республика Тринидад и Тобаго расположена на одноименных островах в Карибском море (рис. 298). Площадь острова Тринидад в 16 раз, или на 4500 км^2 , больше площади острова Тобаго. Най-



Рис. 298

дите с точностью до единицы среднюю плотность населения республики, учитывая, что в ней живет 1,23 млн человек.

490. Коров на первой ферме 400 голов, а на второй — 200, причем на первой ферме надаивают за день на 6000 л молока больше. Найдите, сколько молока надаивают в день на первой ферме, учитывая, что на ней от одной коровы надаивают молока в среднем на 5 л больше, чем на второй ферме.

491. В цехе работали два автомата по изготовлению деталей, производительность первого автомата 12 деталей в час, а второго — 14 деталей в час, причем общее количество изготовленных деталей первым и вторым автоматами равно 66. Учитывая, что время работы первого и второго автоматов вместе составляет 5 ч, найдите время работы каждого автомата.

492. В цехе работали два автомата по изготовлению деталей. Время работы первого автомата 4 ч,

а второго — 3 ч, причем общее количество изготовленных деталей первым и вторым автоматами равно 94. Учитывая, что производительность первого и второго автоматов вместе составляет 26 деталей в час, найдите производительность каждого автомата.

* * *

493. В турнире, который проводится по олимпийской системе (проигравший сразу выбывает), участвуют 10 боксеров. Сколько нужно провести боев для определения победителя?

494. На вопрос о номере своей квартиры Иван ответил так: «Если сложить все шесть двузначных чисел, которые можно образовать из цифр этого номера, то получится удвоенный номер моей квартиры». В какой квартире живет Иван?

495. На прямой AB вне отрезка AB выбрано 25 точек. Докажите, что сумма расстояний от выбранных точек до точки A не равна сумме расстояний до точки B .

15. Многочлен

А) При решении многих задач получаются выражения, являющиеся суммами или разностями одночленов.

Пример 1. Запишем площадь фигуры, показанной на рисунке 299. Получим выражение $ab - 2x^2$, являющееся разностью одночленов ab и $2x^2$.

Пример 2. Найдем периметр фигуры, показанной на рисунке 300. Этот периметр составляют три стороны прямоугольника длинами k , k , l и полуокружность диаметром l . Поэтому искомым периметр равен $2k + l + \frac{1}{2}\pi l$. Полученное выражение является суммой одночленов $2k$, l и $\frac{1}{2}\pi l$.

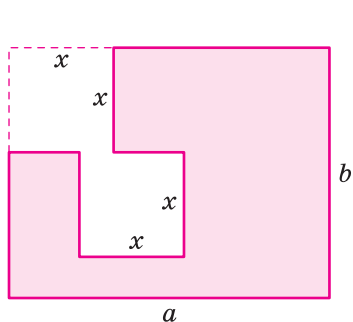


Рис. 299

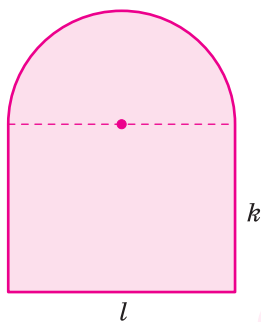


Рис. 300

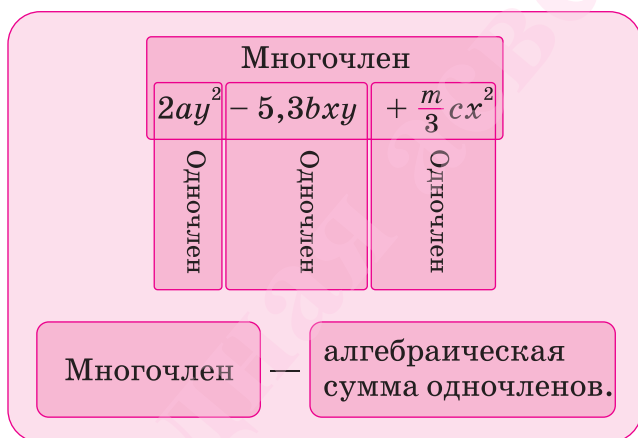


Рис. 301

Алгебраическую сумму одночленов называют **многочленом** (рис. 301).

Одночлены, из которых составлен многочлен, называют его **членами**.

Многочлен из двух членов называют **двучленом**, а из трех членов — **трехчленом**. Одночлен также считают многочленом.

Рассмотрим многочлен $4 + 5a^3x + 2ax^2 - 3 - a^3x$. Его члены $5a^3x$ и $-a^3x$ — подобные слагаемые, поскольку их буквенные части одинаковы. Подобные слагаемые многочлена называют **подобными членами**.

$$\overbrace{4 + 5a^3x + 2ax^2 - 3 - a^3x}^{\text{Подобные члены}}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Подобные члены}}$$

Рис. 302

ми многочлена. Члены 4 и -3 без буквенных частей также подобны (рис. 302).

Приведем подобные члены многочлена $4 + 5a^3x + 2ax^2 - 3 - a^3x$. Получим:

$$\begin{aligned} & 4 + 5a^3x + 2ax^2 - 3 - a^3x = \\ & = (5a^3x - a^3x) + 2ax^2 + (4 + (-3)) = 4a^3x + 2ax^2 + 1. \end{aligned}$$

Каждый член многочлена $4a^3x + 2ax^2 + 1$ записан в стандартном виде, и среди них нет подобных.

Многочлен, все члены которого записаны в стандартном виде и среди которых нет подобных, называют **многочленом стандартного вида** (рис. 303).

Многочлен стандартного вида
 $5k^3l - 7kl + 9l^2 - 7.$

*Нет подобных членов;
 все члены записаны
 в стандартном виде.*

Рис. 303

Любой многочлен можно привести к стандартному виду.

Степенью многочлена называется наибольшая из степеней одночленов после приведения многочлена к стандартному виду. Например, многочлен $2a^3x + ax^2 - 3$ имеет степень 4. Есть единственный многочлен, степень которого не определена. Это нулевой многочлен (число 0).

Пример 3. Приведем подобные в многочлене $4ab - 3ac - abc + bc - 8ac - 4ab + 9bc - 7bc$.

Выделим подобные члены. Для этого подобные члены $4ab$ и $-4ab$ подчеркнем одной чертой, подобные члены $-3ac$ и $-8ac$ — двумя чертами, подобные члены bc , $9bc$ и $-7bc$ — точками. Член $-abc$ подобных не имеет, и его подчеркивать не будем. После этого выполним приведение подобных. Получим:

$$\begin{aligned} \underline{4ab} - \underline{3ac} - abc + \underline{bc} - \underline{8ac} - \underline{4ab} + \underline{9bc} - \underline{7bc} = \\ = -11ac + 3bc - abc. \end{aligned}$$

О членах $4ab$ и $-4ab$, которые в сумме дают нуль, говорят, что они **взаимно уничтожаются**. При приведении подобных их можно зачеркивать.

Б) Сложим многочлены

$$5a + 3b - 3ab - 2 \text{ и } -4ab - 3a + 6b.$$

Получим:

$$\begin{aligned} (5a + 3b - 3ab - 2) + (-4ab - 3a + 6b) = \\ = 5a + 3b - 3ab - 2 - 4ab - 3a + 6b = 2a + 9b - 7ab - 2. \end{aligned}$$

Сначала мы записали сумму данных многочленов, затем раскрыли скобки и в полученном многочлене привели подобные члены. Сумму данных многочленов мы заменили тождественно равным многочленом стандартного вида.

Разность многочленов также можно заменить тождественно равным многочленом стандартного вида. Например, при вычитании из многочлена $5a + 3b - 3ab - 2$ многочлена $-4ab - 3a + 6b$ получаем:

$$\begin{aligned} (5a + 3b - 3ab - 2) - (-4ab - 3a + 6b) = \\ = 5a + 3b - 3ab - 2 + 4ab + 3a - 6b = 8a - 3b + ab - 2. \end{aligned}$$

Сумму или разность любых многочленов можно выразить многочленом стандартного вида.

В) При решении обратной задачи — представлении многочлена суммой или разностью многочленов — пользуются правилами:

если при заключении в скобки членов многочлена перед скобками поставлен знак «плюс», то члены в скобках записывают со своими знаками;

если при заключении в скобки членов многочлена перед скобками поставлен знак «минус», то члены в скобках записывают с противоположными знаками (рис. 304).

$$3ax - 7a + 9x - 5 = 3ax + (-7a + 9x - 5)$$

Знаки не изменились

$$3ax - 7a + 9x - 5 = 3ax - (+7a - 9x + 5)$$

Знаки изменились

Рис. 304

Пример 4. $4k - 5l + 6kl - 7 = 4k - 5l + (6kl - 7)$;
 $4k - 5l + 6kl - 7 = 4k - 5l - (-6kl + 7)$.



1. Что называют многочленом?
2. Как называют одночлены, из которых состоит многочлен?
3. Какой многочлен называют двучленом; трехчленом?
4. Какие члены многочлена называют подобными?
5. Какое тождественное преобразование многочлена называют приведением подобных членов?
6. Как привести подобные члены многочлена?
7. Какой многочлен называют многочленом стандартного вида?
8. Как определить степень многочлена?
9. О каких членах многочлена говорят, что они взаимно уничтожаются?
10. Как сумму или разность многочленов представить многочленом стандартного вида?
11. Сформулируйте правила заключения в скобки членов многочлена.

496. Из выражений $3a + bc$, $2 + ax^3$, $-4a^2 : b^2t + 1$, $3a^2x + t^3$, -4 , $a^2x^2 : t$, x^2y^3z , $5 - ab^2c^4$, $3(a^2 + b^2)$ выберите те, которые являются многочленами.

497. Укажите порядок выполнения действий при вычислении значения многочлена:

$$\begin{array}{ccccccc} x^2 & + & 2 & \cdot & y^2 & \cdot & z \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{array}$$

- а) $3a + bc + 2b$; г) $1 - 4a^2 - b^2t$;
 б) $-3ab^2 + bc$; д) $5a^2xy^3 - 5axy^2z$; Рис. 305
 в) $4a^3b^2c - ab^2c^4$; е) $x^2 + 2y^2z$ (рис. 305).

498. Найдите значение многочлена:

- а) $4m^2n - m^2n^3$ при $m = -1$, $n = 2$;
 б) $5a^2bx - 5a^2b$ при $a = -2$, $b = -1$, $x = 1$;
 в) $x^2y^3z + 4y^3z$ при $x = 2$, $y = \frac{1}{2}$, $z = -2$.

499. Запишите многочленом сумму трех последовательных натуральных чисел, кратных трем, из которых число $3k$ является:

- а) наибольшим; в) средним по величине.
 б) наименьшим;

500. Запишите алгебраическую сумму одночленов и приведите полученный многочлен к стандартному виду:

- а) $2a$, 4 и $-3a$; г) $5x$, $-7x^2$, x , $1,3x$ и 4 ;
 б) $5r$, $-1,7$ и 4 ; д) j^2l , $-2jl^2$, $-4j^2l$ и $6jl^2$;
 в) $-c^2x$, $-cx^2$ и $-3c^2x$; е) rs^3 , $-3rs^2$, -5 , $-rs^2$ и $-9rs^3$.

501. Запишите многочленом стандартного вида выражение (рис. 306):

- а) $11a \cdot (-4b) - 3a^2 \cdot (3b) + 8ab^2$;
 б) $\frac{7s}{12} - \frac{2k^3s^2}{9} + k^2s^2 - \frac{2k^4}{3^4}$;

$$\begin{aligned} & (5mn)(0,2mn^2) - 3m \cdot 2n^2 - 4mn^2(-0,5mn) = \\ & = m^2n^3 - 6mn^2 + 2m^2n^3 = 3m^2n^3 - 6mn^2. \end{aligned}$$

Рис. 306

- в) $10z^2 \cdot (-1,1t) - 3(-zt^2) + (-3z) \cdot (7zt)$;
 г) $(2xy) \cdot \left(\frac{5}{6}x^2y\right) - \left(-1\frac{1}{7}p^2q^3\right)\left(-2\frac{5}{8}pq\right)$;
 д) $\frac{3d \cdot 3e}{11} + de^2 - \left(\frac{5}{7}h^2k^3\right) \cdot (-1,4hk^3)$.

502. Найдите степень многочлена:

- а) $5a + 3b - 3ab$;
 б) $-2 + 4ab^2 + 3a^2 - 6b$;
 в) $5z^2 - 3z^2 - 2z^2 + 5z$;
 г) $2x + 3y - 4z - xy + 3xz - xyz$;
 д) $2x^2 - 3x - 2x^2 + 3x - 2$;
 е) $2x^3y + 3y^2z - 4x - 2x^3y + 3xz - 3y^2z$.

503. Запишите многочлены, выражающие объем и площадь поверхности фигуры на рисунке:

- а) 307; б) 308.

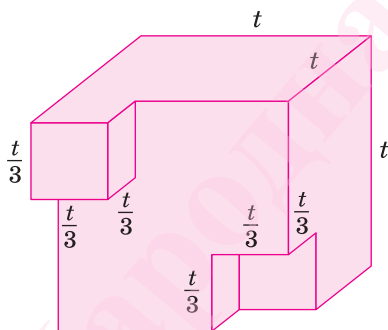


Рис. 307

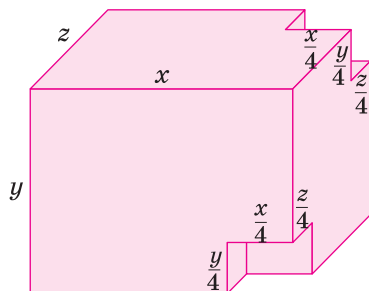


Рис. 308

504. Найдите значение многочлена:

- а) $a^2 + 2ab + b^2$ при $a = 4$, $b = -3$;
 б) $2x^4 - x^2y + 2xy^2 - y^3$ при $x = 1$, $y = -1$;
 в) $m^3 - 3m^2n + 3mn^2 - n^3$ при $m = -5$, $n = 2$;
 г) $x^2y^3 - x^2y^3 + xy^2 - xy$ при $x = -2$, $y = \frac{1}{2}$.

505. Приведите к стандартному виду многочлен:

- а) $\frac{1}{6}v^2 + \frac{1}{3}v - 0,5v^2 - \frac{5}{6}v + 0,2v$;
- б) $\frac{3}{4}a^2b + \frac{1}{2}ab^2 - \frac{5}{8}ab^2 - \frac{7}{8}a^2b - \frac{1}{2}ab^2$;
- в) $0,6c^2 + 3z - 7cz - 3z - 5,4c^2 + 7cz$;
- г) $7,2 - 6h^3 - 4,1h - 0,4h^3 - 1,3h - 9,3$;
- д) $-\frac{3}{4}by - \frac{2}{3}b^2y + 2by - \frac{5}{6}b^2y - 1\frac{1}{2}by$;
- е) $6mn - 4m^2n^2 - 9mn^2 + 5mn - mn^2 - 6m^2n^2$;
- ж) $21i^2jk + 11ijk^2 - 13i^2jk - ijk^2 + 5i^2jk + ijk^2$;
- з) $1\frac{2}{3}vw^3 + 3v^3w - 5\frac{1}{2}v^2w - vw^3 - \frac{1}{2}v^2w - v^3w$.

506. Запишите многочленом стандартного вида:

- а) $7,1u - (2,5u + 5,7u^2)$;
- б) $-0,1a^2 + 6,3a + (3,2a - 0,4a^2)$;
- в) $9y^2 + (7,2 - y^2) + (6,5y^2 - 2)$;
- г) $(6,4c - c^4 + 6) + 0,3c^4 - (7,8c - 4,3c^4)$;
- д) $19v^3 - (11v - 7 + 19v^3)$;
- е) $-13b^3 + 6b + (b + 12b^3)$;
- ж) $\left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b\right) - \left(\frac{2}{3}a + \frac{7}{2}b\right) + (a + b)$;
- з) $\left(\frac{1}{7}x - \frac{4}{9}y\right) - \left(\frac{3}{14}x + \frac{5}{6}y\right) + \left(\frac{11}{14}x + \frac{5}{18}y\right)$.

507. Упростите:

- а) $13a^2 - 7ab + 17b - (25a^2 - 11ab + 21b)$;
- б) $14p^2 + 13p^2q + 7pq^2 + (11p^2q + 5pq^2) - (5p^2 - 4p^2q)$;
- в) $39y + 10by + 25b^2y - (17y + 19by - 3b^2y)$;
- г) $10i^2 + 7j^2 + 6k^2 + 9l^2 + (6i^2 - 5j^2) - (4k^2 - 7l^2)$;
- д) $3uvw - 19vw + 21u + (4uvw + 8vw - 12u) - (10u + 11vw)$;
- е) $21az - 13bz + 18b^2 - (11az + 12bz - 4b^2) - 2az - 2bz$;
- ж) $4m^2 + 6mn + 7m^2n - (4mn + 4m^2) - (6m^2n - 2m^2)$;
- з) $(4efg + 4e^2f^2g^2 + 6e^4f^4g^4) - (3e^4f^4g^4 + 2efg + e^2f^2g^2)$;
- и) $(-8h^2 + 9hi + i^2) + (6h^2 - 3hi + i^2) - (h^2 - 10hi + 8i^2)$;
- к) $(t^2 + v^3 + 2t^2v^3) - (-6t^2u^3 - 3v^3 + 4t^2) - (3t^2 + u^3t^2)$.

508. Найдите значение выражения $(6b^3 - 7b^2c + 4bc^2) - (4b^3 + 8b^2c + 2bc^2) + (6b^3 + 15b^2c - 2bc^2)$ при значении b , равном:

а) -10 ; в) $-\frac{1}{2}$; д) $\frac{1}{4}$; ж) 2 ;

б) -2 ; г) 0 ; е) $\frac{1}{2}$; з) 10 .

509. Найдите значение выражения (рис. 309):

а) $(6,8xy^2 - 4,2xy - 9x^3) - (5,8xy - 2,2xy^2 - 9x^3)$ при $x = 5$, $y = -2$; $x = -25$, $y = -4$;

б) $8a^3 - (13ac - 11a^3) + (10ac - 19a^3)$ при $a = \frac{2}{3}$, $c = -17$; $a = -4,2$, $c = -2\frac{1}{6}$;

в) $3a^2b - 2ab^2 + a^2b + 2ab^2 - ab - 7$ при $a = -2$, $b = 3$; $a = 2$, $b = -3$;

г) $5x^5y^4 - 4x^5y^4 + x^2y^2 - x^5y^4 - x^2y^2 + x - y - 11$ при $x = 10$, $y = -5$; $x = 0,1$, $y = 50$.

$$\begin{aligned} 4n^3 - (5m^5 - 6n^3) + (4m^5 - 9n^3) &= \\ &= 4n^3 - 5m^5 + 6n^3 + 4m^5 - 9n^3 = \\ &= n^3 - m^5; \\ n &= 11; m = 4; \\ 11^3 - 4^5 &= 1331 - 1024 = 307. \end{aligned}$$

Рис. 309

510. Решите уравнение:

а) $1,4i - 2,5 + 4,7i = 3 - 1,4i + 2,7$;

б) $6,3 + 7,8j - 3,6j = j - 12,9 - 7,3j$;

в) $\frac{2}{3}x - \frac{1}{7} - \frac{1}{2}x + \frac{3}{14} = x - \frac{9}{14} - \frac{5}{6}x$;

г) $\frac{5}{9}z + \frac{1}{3}z + \frac{7}{12} = \frac{5}{12}z + \frac{11}{18} + \frac{3}{4}z - z$.

511. Решите уравнение:

а) $(5m^3 - 4m^2 + 3m + 2) + (4m^2 - 6 - 5m^3 - 8m) = 11$;

б) $(2x^2 - 3x - 7) - (11 - 5x - 5x^2) + (8 + 3x - 7x^2) = 5$.

512. Найдите многочлен K , обращающий в тождество равенство (рис. 310):

- а) $4z^3 - 4z + a - K = 3a$;
- б) $K - (c^2 + 6c - 1) = 1$;
- в) $K + (6s^2 - 3st) = 7s^2 + 6st - t^2$;
- г) $K - (3xz - 3z^2) = x^2 - 9xz + 11z^2$.

$$\begin{aligned} 3by^2 - K + 4y^2 &= 5by^2 - 14y^2; \\ 3by^2 + 4y^2 - K &= 5by^2 - 14y^2; \\ K &= \underline{3by^2} + \underline{4y^2} - \underline{5by^2} + \underline{14y^2}; \\ K &= -2by^2 + 18y^2. \end{aligned}$$

Рис. 310

513. Докажите, что сумма:

- а) двух нечетных чисел есть четное число;
- б) четного и нечетного чисел есть нечетное число;
- в) двух последовательных натуральных чисел есть нечетное число;
- г) трех последовательных натуральных чисел делится на 3;
- д) четырех последовательных натуральных чисел не делится на 4;
- е) трех последовательных нечетных натуральных чисел делится на 3 (рис. 311).

$2k + 1, 2k + 3, 2k + 5$ — три последовательных нечетных числа.

$$2k + 1 + 2k + 3 + 2k + 5 = 6k + 9 = 3(2k + 3).$$

$2k + 3$ есть натуральное число, поэтому

$3(2k + 3)$ делится на 3.

Значит, на 3 делится и сумма $2k + 1 + 2k + 3 + 2k + 5$.

Рис. 311

514. Докажите, что значения многочлена $x^3 - x^2 - 2$ при отрицательных значениях x отрицательны.

515. Увеличьте число 90 на:

- а) 10 %; в) 50 %; д) 5 %;
б) 20 %; г) 25 %; е) 15 %.

516. Приведите подобные члены:

- а) $13a + 28a - 14a$; в) $\frac{1}{2}u + \frac{1}{3}u + \frac{1}{6}u$;
б) $27x^2 - 11x^2 - 35x^2$; г) $\frac{1}{12}v^3 + \frac{2}{3}v^3 - \frac{5}{6}v^3$.

517. Решите уравнение:

- а) $\frac{1}{2}x - \frac{5}{6} = \frac{4}{5}x + \frac{11}{12}$;
б) $0,4a + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}a - 0,8$;
в) $4,6k - 2,3 + 6,4k = k - 11,2$;
г) $8,9l + 5,8 = 23,1l - 14,2 - 20,1l$.

518. Упростите выражение:

- а) $\left(\frac{2}{3}c^4x^5\right)^3 \cdot (-cx)^2$;
б) $-0,1b^5y^6 \cdot (-20by^2)^2$;
в) $\left(\frac{5}{6}u^5v^8\right)^2 \cdot \left(1\frac{1}{5}u^9v^4\right)^3$;
г) $(-ab^3)^4 \cdot (-0,1a^3b)^3 \cdot (30a^4b^6)^3$.

519. Запишите все способы представления степенью с показателем, большим 1, числа:

- а) 3^{15} ; б) 3^{10} ; в) 3^{18} ; г) 3^{12} (рис. 312).

$$\begin{aligned} 12 &= 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 6 \cdot 2; \\ 3^{12} &= (3^1)^{12} = (3^2)^6 = (3^3)^4 = (3^4)^3 = (3^6)^2; \\ \text{или} \\ 3^{12} &= 3^{12} = 9^6 = 27^4 = 81^3 = 729^2. \end{aligned}$$

Рис. 312

520. Длина реки Солон составляет 80 % длины Талицы и 25 % длины Оресы. Найдите длину

ны этих рек, учитывая, что Солон короче Талицы на 8 км.

521. Среднегодовой расход воды в устье Талицы составляет полтора расхода воды Солона, а расход воды Оресы на $0,1 \text{ м}^3/\text{с}$ меньше увеличенного в восемь раз расхода воды Талицы. Найдите среднегодовые расходы воды этих рек, учитывая, что расход воды Солона на $15,3 \text{ м}^3/\text{с}$ меньше расхода воды Оресы.

522. В Столинском районе находятся населенные пункты Давид-Городок и Речица. Население Давид-Городка составляет 56 % от населения Столина и на 0,4 тыс. человек больше населения Речицы. Найдите, сколько жителей в каждом из этих населенных пунктов, зная, что в них вместе живет 26,1 тыс. человек.

523. Озера Жежлино, Люкшино и Хотино находятся в Лепельском районе. Объем воды в Люкшино в 1,85 раза больше, чем в Жежлино, а в Хотино на 1,1 млн м^3 меньше, чем в Жежлино. Найдите объем воды в каждом из этих озер, учитывая, что вместе в них 4,29 млн м^3 воды.

524. Сторона PQ треугольника PQR на 2 см больше его стороны PR и на 2 см меньше стороны QR (рис. 313). Найдите длины сторон, учитывая, что периметр треугольника равен 27 см.

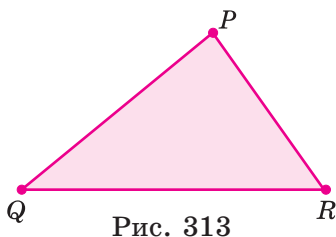


Рис. 313

525. На ребре куба выбрали точку M . Докажите, что эта точка вместе с вершинами куба K и L (рис. 314) определяет равнобедренный треугольник.

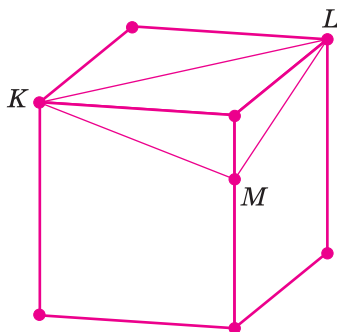


Рис. 314

526. Есть два равных треугольника. Докажите, что в них равны биссектрисы, проведенные к соответствующим сторонам.

527. Путь, который проехал велосипедист за 4 ч, на 50 км больше пути, который прошел пешеход за 2 ч. Найдите скорости пешехода и велосипедиста, учитывая, что скорость велосипедиста в три раза больше.

528. С участков площадями 16 га и 20 га вместе собрали 1072 ц ячменя. Учítывая, что урожайность первого участка на 4 ц/га больше урожайности второго, найдите урожайности каждого участка.

529. С участков, урожайности которых составили 30 ц/га и 25 ц/га, вместе собрали 1250 ц ячменя. Учítывая, что площадь первого участка на 5 га больше площади второго, найдите площадь каждого участка.

* * *

530. Можно ли найти семь таких различных натуральных чисел, что сумма обратных им чисел равна единице?

531. Расшифруйте арифметический ребус
 $\text{СОМ}^c = \text{ОГОГО},$

в котором одинаковые цифры заменены одинаковыми буквами, а разные — разными.

532. В строчку выписано 40 чисел, причем произведение любых трех соседних больше 1. Можно ли утверждать, что произведение всех выписанных чисел больше единицы?

16. Умножение многочленов

А) Умножим одночлен $6ab$ на многочлен $a^2 + ab + 2b$. Получим:

$$\begin{aligned} & 6ab \cdot (a^2 + ab + 2b) = \\ & = 6ab \cdot a^2 + 6ab \cdot ab + 6ab \cdot 2b = 6a^3b + 6a^2b^2 + 12ab^2. \end{aligned}$$

Мы записали произведение одночлена и многочлена, затем раскрыли скобки, используя распределительное свойство умножения относительно сложения и вычитания, и записали одночлены в стандартном виде. Произведение одночлена и многочлена мы заменили тождественно равным многочленом стандартного вида.

При умножении одночлена на многочлен пользуются правилом:

чтобы умножить одночлен на многочлен, надо этот одночлен умножить на каждый член многочлена и полученные произведения сложить (рис. 315).

Если рассматривать A , B , C , D как длины отрезков и учесть правило нахождения площади прямоугольника, то правило умножения одночлена на многочлен разъясняет рисунок 316.

$$A(B + C + D) = AB + AC + AD.$$

Рис. 315

	B	C	D
A	AB	AC	AD

$$S = A(B + C + D)$$

$$S = AB + AC + AD$$

Рис. 316

Пример 1. Найдем произведение $(5cx - c^3x + c) \cdot (-3cx^2)$. Умножая многочлен $5cx - c^3x + c$ на одночлен $-3cx^2$, получаем:

$$\begin{aligned} (5cx - c^3x + c) \cdot (-3cx^2) &= \\ &= 5cx \cdot (-3cx^2) - c^3x \cdot (-3cx^2) + c \cdot (-3cx^2) = \\ &= -15c^2x^3 + 3c^4x^3 - 3c^2x^2. \end{aligned}$$

Промежуточные результаты можно не писать, а сразу записывать ответ, выполняя умножение одночленов устно.

Б) Найдем произведение $(a + b)(x + y + z)$ многочленов $a + b$ и $x + y + z$. Будем второй множитель

рассматривать как одно целое и используем распределительное свойство умножения:

$$(a + b)(x + y + z) = a(x + y + z) + b(x + y + z).$$

Теперь раскроем скобки в произведениях полученной суммы:

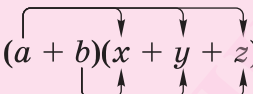
$$a(x + y + z) + b(x + y + z) = ax + ay + az + bx + by + bz.$$

Таким образом,

$$(a + b)(x + y + z) = ax + ay + az + bx + by + bz.$$

В правой части равенства записан многочлен, который является суммой произведений, получающихся при умножении каждого члена многочлена $a + b$ на каждый член многочлена $x + y + z$.

Чтобы умножить многочлен на многочлен, надо каждый член первого многочлена умножить на каждый член второго многочлена и записать сумму полученных произведений (рис. 317).



$$(a + b)(x + y + z) = ax + ay + az + bx + by + bz.$$

Рис. 317

Если переменные a, b, c, x, y, z рассматривать как длины отрезков и учесть правило нахождения площади прямоугольника, то правило умножения многочленов можно проиллюстрировать. Например, рисунки 318 и 319 поясняют тождества:

$$(a + b)(x + y) = ax + ay + bx + by;$$

$$(a + b + c)(x + y) = ax + ay + bx + by + cx + cy.$$

Можно заметить, что при умножении многочлена с m членами на многочлен с n членами получается многочлен с mn членами. Если в полученной

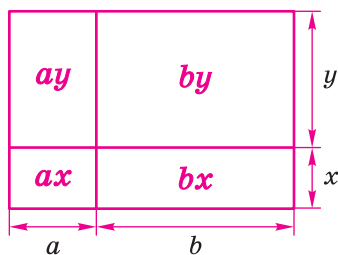


Рис. 318

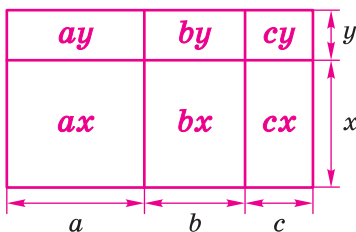


Рис. 319

сумме имеются подобные слагаемые, то их обычно приводят.

Пример 2. Умножим многочлен $p - 3q$ на многочлен $2p^2 - 3pq + q^2$. Получим:

$$\begin{aligned}
 & (p - 3q)(2p^2 - 3pq + q^2) = \\
 & = p \cdot 2p^2 + p \cdot (-3pq) + pq^2 + (-3q) \cdot 2p^2 + \\
 & \quad + (-3q)(-3pq) + (-3q)q^2 = \\
 & = 2p^3 - 3p^2q + \underline{pq^2} - 6p^2q + \underline{9pq^2} - 3q^3 = \\
 & = 2p^3 - 9p^2q + 10pq^2 - 3q^3.
 \end{aligned}$$

Понятно, что записи могут быть и более краткими.

Пример 3. Упростим выражение $(4 - n)(2n^2 - n + 3) - 5n^2(n - 2)$. Получим:

$$\begin{aligned}
 & (4 - n)(2n^2 - n + 3) - 5n^2(n - 2) = \\
 & = \underline{8n^2} - \underline{4n} + \underline{12} - \underline{2n^3} + \underline{n^2} - \underline{3n} - \underline{5n^3} + \underline{10n^2} = \\
 & = -7n^3 + 19n^2 - 7n + 12.
 \end{aligned}$$

Умножение более чем двух многочленов выполняются по очереди.

Пример 4. Найдем произведение $(a - x)(2a - x + 3y)(a - 2x)$:

$$\begin{aligned}
 & (a - x)(2a - x + 3y)(a - 2x) = \\
 & = (2a^2 - ax + 3ay - 2ax + x^2 - 3xy)(a - 2x) = \\
 & = (2a^2 - 3ax + 3ay + x^2 - 3xy)(a - 2x) = \\
 & = 2a^3 - \underline{4a^2x} - \underline{3a^2x} + \underline{6ax^2} + 3a^2y - \underline{6axy} + \underline{ax^2} - \\
 & \quad - 2x^3 - \underline{3axy} + 6x^2y = \\
 & = 2a^3 - 7a^2x + 7ax^2 + 3a^2y - 9axy - 2x^3 + 6x^2y.
 \end{aligned}$$



1. Сформулируйте правило умножения одночлена на многочлен.
2. Какие свойства умножения используют при умножении одночлена на многочлен?
3. Сформулируйте правило умножения многочлена на многочлен.
4. Сколько слагаемых получается при умножении многочлена с m членами на многочлен с n членами?

533. Проверьте, верно ли выполнено умножение:

- а) $2(a - 4) = 2a - 4$; д) $2(-c - 4) = -2c + 4$;
б) $-3(y - 1) = -3y - 3$; е) $-3(t - 2) = -3t + 6$;
в) $4(b + 1) = 4b + 4$; ж) $4(-k + 2) = -4k + 8$;
г) $-5(x + 2) = -5x - 10$; з) $-2(z - 3) = -2z + 6$.

534. Проверьте, верно ли выполнено умножение:

- а) $a(b - 4) = ab - 4a$;
б) $-3x(y - 1) = -3xy + 3$;
в) $4a(b - 2) = 4ab - 8a$;
г) $-2x(y - 5) = -2xy - 10x$;
д) $(2 + a)(b - 4) = 2ab - 4a$;
е) $(x - 3)(y - 1) = xy + 3$;
ж) $(4 - a)(b + 1) = 4b + 4 - ab - a$;
з) $(x + 2)(y - 5) = xy - 5x + 2y - 10$.

535. Выполните умножение:

- а) $3b(b - 4)$; д) $(2 + a)(-4b)$;
б) $-2c(b - 3)$; е) $(x - 3)(-y)$;
в) $4a(-2b - 2)$; ж) $(4 - x)(y + 2)$;
г) $-2x(3x - 2)$; з) $(-t + 3)(t - 5)$.

536. Выполните умножение:

- а) $\frac{3}{7}a(2,1a^3 - 4,2a)$;
б) $-\frac{2}{3}x(0,9y^2 - 15x)$;
в) $\left(\frac{1}{2}c^2d^3 + \frac{5}{6}cd^2\right) \cdot \frac{6}{7}c^2d$;

- г) $\left(\frac{2}{3}m^4n^3 + \frac{2}{9}m^3n\right) \cdot \frac{27}{34}m^3n^2$;
 д) $-\frac{1}{2}pq\left(\frac{2}{3}q^2 - \frac{4}{5}pq + \frac{6}{7}p^2\right)$;
 е) $\left(5b^3x - \frac{5}{14}bx^3 - \frac{10}{21}x^2\right) \cdot \frac{7}{15}b^4x^3$;
 ж) $\left(4\frac{1}{3}k^4l^3 - 1\frac{6}{7}k^3l^4 - 13kl^2\right)\left(-1\frac{8}{13}k^2l^5\right)$;
 з) $\left(-2\frac{10}{19}c^4z^6\right)\left(-\frac{19}{24}c^5z - 2\frac{3}{8}cz^5 + 1\frac{3}{16}c^3z^4\right)$.

537. Запишите многочленом выражение:

- а) $(q^2 - 4q + 5) \cdot 6q - (8 - 4q - 2q^2) \cdot 2q$;
 б) $11d^2 - (d - 2e) \cdot 4d + 3e(5e - 6d) - 5e^2$;
 в) $9t^2(t - 4) - t^24t - t \cdot 6t^2 + (t^3 - 7t)$;
 г) $k \cdot 7k^3 - (3^3 - 4) + (k + 4) \cdot 5k^3 - k \cdot 10k^2$;
 д) $2x^2 - x(5x - 2y) - y(3x - y)$;
 е) $5i^2 - 6i(-i + 2j) + 6i\left(-2i - 2\frac{1}{2}\right)$;
 ж) $5(3,4 - 0,8w + 0,16w^2) - 2(-1 + 1,5w + 0,2w^2)$;
 з) $\left(\frac{1}{3}f - \frac{1}{2}g\right) \cdot 6f - \left(\frac{2}{3}g - \frac{1}{2}f\right) \cdot 12g - (5g - 3f)(-2g)$.

538. Запишите многочленом выражение:

- а) $10v(4v^2 - 6w) - 5v(6w + 7v^2) - 2vw$;
 б) $5x(4y - 3x) - 7(4x^2 - 3xy) - 3x(5x - 2y)$;
 в) $1,6a(0,5a - 0,4x) - 5(0,6x^2 - 4ax) + 0,2x(8x - 5a)$;
 г) $(1,5d^2 - 1,15) \cdot 1,6d - (2,2d - 1,8) \cdot 0,5d^2 - 0,8(2,6d^2 - 1,4d + 3,2)$;
 д) $5z - 3(z - 2) - 3(z - 4(3 - 2z) + 7) - 5(-z - 1)$;
 е) $5m - 3(2 - 3(3m - y)) - 3(y - (2m - 3y) - 5)$.

539. Найдите значение выражения при данных значениях переменных:

- а) $-2c(c^2 - c - 2) + c(2c^2 - c - 4)$ при $c = -11$; $-0,11$; 11 ;
 б) $a(a - b) - b(b^2 - a)$ при $a = -6$ и $b = 2$; $a = 6$ и $b = -2$;
 $a = -6$ и $b = -2$;
 в) $6y(3y - 2) - 3,5y(6y - 3)$ при $y = -2$; $-0,2$; 2 ;

г) $4d(d - 5e) - 5e(e - 4d)$ при $d = 5$ и $e = -7$; $d = -5$ и $e = -7$; $d = -5$ и $e = 7$.

540. Докажите, что:

а) выражение $a(3a - 2) - a^2(a + 3) + (a^3 + 2a - 8)$ имеет одно и то же значение при любом значении переменной a ;

б) изменение значения переменной x не изменяет значения выражения $x(2x^2 - x - 6) - (3x^3 + 2x - 13) + (x^3 + x^2 + 8x - 10)$;

в) значение выражения $2t(t^2 + t) - t(3t^2 + 1) - (5 + t^2 - t^3)$ не зависит от значения переменной t (рис. 320);

$$2t(t^2 + t) - t(3t^2 + 1) - (5 + t^2 - t^3) = \\ = \underline{2t^3} + \underline{2t^2} - \underline{3t^3} - \underline{t^2} - 5 - \underline{t^2} + \underline{t^3} = -5.$$

Данное выражение тождественно равно -5 . Поэтому изменение значения переменной t не меняет значения самого выражения.

Рис. 320

г) значение выражения $3p(p - 4) - 6(p^2 - 2p + 2)$ отрицательно при любых значениях переменной p ;

д) значение выражения $4b(3 - b) - 4(b^2 - 1) + 4(3b^2 - 3b + 1)$ положительно при любых значениях переменной b ;

е) значение выражения $3m(m - 5) + 5m(5 - m) - 10(m + 1)$ отрицательно при любых значениях переменной m (рис. 321).

$$3m(m - 5) + 5m(5 - m) - 10(m + 1) = \\ = 3m^2 - 15m + 25m - 5m^2 - 10m - 10 = \\ = -2m^2 - 10 = -2(m^2 + 5).$$

Значение выражения $m^2 + 5$ положительно при любых значениях m . Поэтому значение выражения $-2(m^2 + 5)$ отрицательно при любых значениях m .

Рис. 321

541. Решите уравнение:

а) $2d(3d - 2) - 6d(8 + d) = 26$;

б) $2,5l(3 + 3l) = 7,5l(l + 2) - 60$;

- в) $12s(5s - 6) - 15s(4s - 10) = 50 + 28s$ (рис. 322);
 г) $35g - 7g(21g - 9) = -56 - 49g(3g - 2)$;
 д) $5(-3a + 1) - 2(a + 11) = 2a - 3(2 - a)$;
 е) $-5(4 - 2k) + 4(k - 7) = 7(3 - k) - 2k$;
 ж) $4x(5x - 1) - 2x(10x - 4) = 13x - 7(3 + x)$;
 з) $18z + 8z(2 - 3z) = 6z(5 - 4z) - 39$.

$$\begin{aligned} 12s(5s - 6) - 15s(4s - 10) &= 50 + 28s; \\ 60s^2 - 72s - 60s^2 + 150s &= 50 + 28s; \\ -72s + 150s - 28s &= 50; \\ 50s &= 50; \\ s &= 1. \end{aligned}$$

Рис. 322

542. Выполните умножение:

- а) $(3a + 3)(6a - 4)$; ж) $(a^2 + 2b^2)(a^2 - b)$;
 б) $(5l - 2m)(4l - m)$; з) $(3j^2 - k^2)(4j^2 + k^2)$;
 в) $(3x - 7y)(3x + 7y)$; и) $(5w^2 - 4w)(w + 1)$;
 г) $(5 - h)(h + 5)$; к) $(r - 2)(4r^3 - 3r^2)$;
 д) $(2c + 5d)(5d - 2c)$; л) $(9t^2 - 4t)(7t - 5)$;
 е) $(x^2 + y)(x + y^2)$; м) $(g^3 + 5g^4)(g^3 - 2g)$.

543. Представьте многочленом выражение:

- а) $(x^2 + a)(a + x^2)$; д) $(y^2 - 2y + 1)(y - 1)$;
 б) $(a^2 + 2b)(2a + b^2)$; е) $(4d - 5z)(-8d - 6x + 8z)$;
 в) $(6f^2 - 7g^2)(7f^2 - 6g^2)$; ж) $(6q - v)(-3q + 5v - 3w)$;
 г) $(9i^3 - 8j^4)(9j^4 - 8i^3)$; з) $(7i - 5j + 2k)(5i - 5j)$.

544. Раскройте скобки:

- а) $(9g^2 - 6gh + 4h^2)(3g + 2h)$;
 б) $(9k^2 - 15kl + 25l^2)(3k + 5l)$;
 в) $(-2y^2 + 3y + 3)(4y - 3)$;
 г) $(7 - 3s)(5s^2 + 5s + 4)$;
 д) $(i^2 - i + 2)(3i^2 + i - 3)$;
 е) $(4 - 3z - z^2)(4z^2 - 2z - 1)$;

- ж) $(k^2 - 2l^2)(k^4 + 2k^2l^2 + 4l^4)$;
 з) $(16c^2 - 20cd^2 + 25d^4)(4c + 5d^2)$.

545. Представьте многочленом выражение:

- а) $(3a - 2)(2a + 5) - 5a(3a - 5)$;
 б) $(7x + 4)(2x + 3) - 3x(7x - 1)$;
 в) $(b^3 + 2b^2c - 5bc^2 - 3c^3)(5b + 4c)$;
 г) $(m^3 + 3m^2n - 3mn^2 + 4n^3)(3m + 2n)$;
 д) $(d^4 + 3d^3 + 5d^2 - 3d + 1)(d^2 - 2d + 1)$;
 е) $(3z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 4z + 2)(z^2 - z - 3)$;
 ж) $\left(\frac{1}{2}i - \frac{1}{3}j - \frac{1}{4}l\right)\left(\frac{1}{3}i - \frac{1}{2}j - \frac{1}{4}l\right)$;
 з) $\left(\frac{2}{3}m + \frac{1}{2}n + \frac{3}{4}k\right)\left(\frac{3}{4}k - \frac{1}{2}n + \frac{2}{3}m\right)$.

546. Представьте многочленом выражение:

- а) $(9 + 7a^2 - 5a)(-3a + 2 - a^2)$;
 б) $(5ij^2 - 3i^3 + 2i^2j)(-ij + 3i^2 + 4j^2)$;
 в) $(4c^2 + 4d^2 - 2cd)(-2cd - d^2 + 7c^2)$;
 г) $(3u^2 - 4v^2 + 6uv)(uv^2 + 5u^3 - 3u^2v)$;
 д) $(4g^2 - 5g^3 + 2g + 1)(4 - 3g^2 + 7g)$;
 е) $(-3 + 6x^2 - 8x - 10x^3)(-2 + 4x^2 - x)$;
 ж) $(x - a)(x - b)(x - c)$;
 з) $(m^2 + m + 1)(m^2 - m + 1)(m^2 - 1)$;
 и) $(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)$;
 к) $(v^3 + v^2w + vw^2 + w^3)(v - w)$;
 л) $(p^4 - p^3q + p^2q^2 - pq^3 + q^4)(p + q)$.

547. Докажите, что при любом целом значении n значение выражения:

- а) $n(n + 5) - (n + 1)(n + 2)$ четное;
 б) $(n + 2)(n + 4) - (n - 4)(n - 5)$ кратно трем;
 в) $(n - 2)(n - 3) - (n - 6)(n - 7)$ кратно четырем;
 г) $(n - 3)(n - 4) - (n - 8)(n - 9)$ кратно пяти;
 д) $(n - 2)(n - 3) - (n - 5)(n - 6)$ кратно шести;
 е) $(2n + 1)(n + 3) - (2n + 6)(n - 3)$ кратно семи;
 ж) $(2n - 1)(n + 2) - (2n + 5)(n - 4)$ кратно шести (рис. 323).

$$\begin{aligned}
 & (2n - 1)(n + 2) - (2n + 5)(n - 4) = \\
 & = 2n^2 + 4n - n - 2 - 2n^2 + 8n - 5n + 20 = \\
 & = 6n + 18 = 6(n + 3).
 \end{aligned}$$

Значение выражения $6(n + 3)$ кратно 6 при любом значении n . Поэтому и значение выражения $(2n - 1)(n + 2) - (2n + 5)(n - 4)$ кратно 6 при любом значении n .

Рис. 323

548. Решите уравнение:

- а) $(x + 4)(x - 2) - (x - 1)(x + 5) = 0$;
- б) $a^2 + a(8 - 2a) = -(a - 3)(a - 4) - 5$;
- в) $(3y - 1)(2y + 5) - (y + 2)(6y - 3) = 21$;
- г) $(3b - 2)(2b + 3) - (6b^2 - 37) = 71$;
- д) $(4z + 1)(3z - 5) - (2z - 11)(6z - 7) = 44$;
- е) $(c + 1)(c + 2) - (c + 3)(c + 4) = 42$;
- ж) $(3t - 4)(4t - 3) - (6t + 4)(2t - 3) = 3$;
- з) $5(d + 1)(d + 2) = 42 + (5d - 2)(d + 2)$;
- и) $2(4u - 2)(2u + 5) = 16 + (4u - 1)(4u - 4)$;
- к) $2(3v - 2)(2v + 6) + 3(1 - 4v)(v - 1) = 50$;
- л) $2(5s - 4)(s - 1) = -32 - 5(2s + 3)(s + 2)$.

549. Найдите четыре последовательных четных натуральных числа, учитывая, что произведение второго и четвертого чисел на 52 больше произведения первого и третьего чисел.

550. Периметр прямоугольника равен 70 см. Если увеличить его ширину на 2 см, а длину на 5 см, то площадь нового прямоугольника будет на 120 см^2 больше площади данного. Найдите измерения данного прямоугольника.

551. Числа 3,141; 3,142; $3\frac{1}{7}$ и $3\frac{10}{71}$ — приближенные значения числа $\pi = 3,14159265\dots$. Какое из них более точное?

552. Представьте степенью выражение (рис. 324):

- а) $4^4 \cdot 2^{19}$; в) $8^6 \cdot 16^{15}$; д) $16^7 \cdot 4^{23}$.
 б) $9^7 \cdot 3^{21}$; г) $27^{11} \cdot 9^{13}$;

$$9^{13} \cdot 81^{15} = 9^{13} \cdot (9^2)^{15} = 9^{13} \cdot 9^{30} = 9^{43}.$$

Рис. 324

553. Решите уравнение:

- а) $\frac{a-3}{6} + \frac{2}{3} = \frac{2a-5}{5}$; в) $\frac{2k+7}{6} = 2,25 + \frac{3k-1}{4}$;
 б) $\frac{2m+3}{3} - 1\frac{1}{3} = \frac{m-11}{5}$; г) $\frac{3s+2}{4} + 2 = \frac{7s+20}{6}$.

554. Докажите тождество:

- а) $(1+m)(1-m)(1+m^2) = 1-m^4$ (рис. 325);
 б) $2(x-y) - 3(x+y) - (5x-4y) + 5(x-2y) - (x-y) = -2(x+5y)$;
 в) $3(2a-3b) - 4((3a+b) - (a-3b)) - (4(a-b) - 5(3a-b)) = 9a - 26b$.

$$\begin{aligned} (1+m)(1-m)(1+m^2) &= \\ &= (1-m+m-m^2)(1+m^2) = \\ &= (1-m^2)(1+m^2) = \\ &= 1+m^2-m^2-m^4 = \\ &= 1-m^4. \end{aligned}$$

Рис. 325

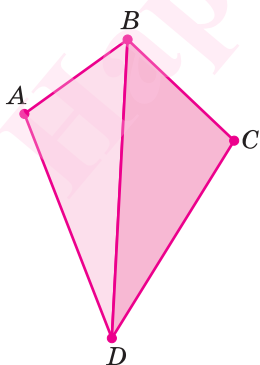


Рис. 326

555. По словам Анфисы, у нее на трех полках 118 книг, причем на второй на 9 книг больше, чем на первой, а на третьей на 4 книги меньше, чем на второй. Возможно ли такое распределение книг?

556. Вы знаете, что сумма углов треугольника равна 180° . Используя это и рисунок 326, докажите, что сумма углов четырехугольника равна 360° .

557. Один угол четырехугольника вдвое больше второго, на 25° больше третьего и втрое меньше четвертого (рис. 327). Найдите углы четырехугольника.

558. Есть два равных треугольника. Докажите, что в них равны медианы, проведенные к соответствующим сторонам.

559. Уза, Липа и Чечера — притоки Сожа, протекающие по Буда-Кошелевскому району. Длина Липы на 14 км меньше длины Узы и на 6 км больше длины Чечеры. Найдите длины этих рек, учитывая, что длина Чечеры составляет $\frac{14}{19}$ длины Узы.

560. Уза за одну секунду вливает в Сож на $0,2 \text{ м}^3$ воды больше Чечеры и на 1 м^3 больше Липы. Найдите среднегодовые расходы воды в устьях Узы, Чечеры и Липы, учитывая, что расход воды Липы составляет $\frac{3}{4}$ расхода воды Чечеры.

561. Найдите массу 1 см^3 алюминиевой бронзы, если для ее получения использовали меди 12 кг, алюминия — 10 % этого количества. Учтите, что масса 1 см^3 меди равна 8,9 г, алюминия — 2,7 г.

562. Масса серебряного слитка 875-й пробы равна 232 г. Определите, сколько нужно взять меди, чтобы после переплавки получить серебро 840-й пробы.

563. В емкости содержится 10,5 мл 40-процентного раствора серной кислоты. Определите, сколько 75-процентного раствора этой же кислоты нужно долить в емкость, чтобы получить 50-процентный раствор.

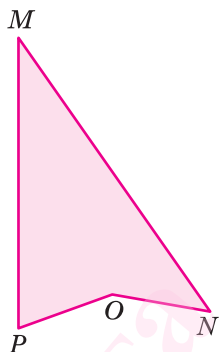


Рис. 327

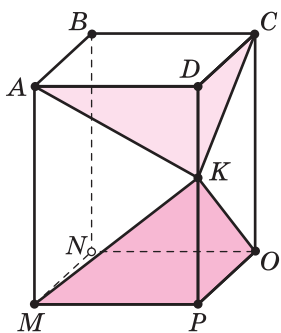


Рис. 328

564. В основании прямоугольного параллелепипеда $MNOPABCD$ лежит квадрат (рис. 328). На ребре PD выбрали точку K и соединили ее с вершинами M, O, A, C . Докажите, что:

- KM и KO равны;
- отрезки KA и KC равны;
- углы MKA и OKC равны;
- углы KMA и KOC , а также KAM и KCO равны.

565. На двух машинах перевозили картофель, причем на первой сделали 6 рейсов, на второй — 4. Найдите, сколько картофеля перевезли на каждой машине, учитывая, что на первой машине перевозили картофеля в 3 раза больше, чем на второй, а их суммарная грузоподъемность равна 9 т.

566. В первом кинотеатре 30 рядов, а во втором — 20, причем в первом кинотеатре имеется на 1000 мест больше, чем во втором. Учитывая, что количество мест в одном ряду первого кинотеатра вместе с количеством мест в одном ряду второго кинотеатра составляет 100, найдите количество мест в одном ряду каждого кинотеатра.

567. В первом кинотеатре ряд содержит 56 мест, а во втором — 50, причем первый кинотеатр содержит на 504 места больше, чем второй. Учитывая, что количество рядов в первом кинотеатре вместе с количеством рядов во втором кинотеатре составляет 62, найдите количество рядов в каждом кинотеатре.

* * *

568. На сколько частей можно разбить плоскость четырьмя прямыми?

569. Докажите, что если 15-угольник имеет ось симметрии, то она проходит через одну из его вершин.

570. Можно ли прямоугольную таблицу размерами 20×30 клеток заполнить числами так, чтобы их сумма в каждой строке таблицы была положительной, а в каждом столбце — отрицательной?

17. Вынесение общего множителя за скобки

А) Рассмотрим сначала деление одночленов.

Пример 1. Выполним деление $12x^4y^3 : 3x^2$.

Получим:

$$\begin{aligned} 12x^4y^3 : (3x^2) &= (12x^4y^3 : 3) : x^2 = ((12 : 3)x^4y^3) : x^2 = \\ &= (4x^4y^3) : x^2 = 4(x^4 : x^2)y^3 = 4x^2y^3. \end{aligned}$$

Переход (1) сделан на основании правила деления числа на произведение, переходы (2) и (3) используют правило деления произведения на число, при переходе (4) использовано правило деления степеней с одинаковыми основаниями.

Понятно, что промежуточные вычисления можно не записывать.

Пример 2. Разделим $14m^4n^5k^2$ на $7m^3k^2$.

Получим:

$$14m^4n^5k^2 : (7m^3k^2) = 2mn^5.$$

Результат деления одночленов можно проверить умножением. Поскольку $(2mn^5) \cdot (7m^3k^2) = 14m^4n^5k^2$, то деление в примере 2 выполнено верно.

Б) Рассмотрим деление многочлена на одночлен.

Пример 3. Разделим многочлен $6k^2l^3 - 12k^3l^2 + 9kl^2m$ на $3kl$.

Используя правило деления суммы на число, получим:

$$\begin{aligned} (6k^2l^3 - 12k^3l^2 + 9kl^2m) : (3kl) &= \\ = (6k^2l^3) : (3kl) - (12k^3l^2) : (3kl) + (9kl^2m) : (3kl) &= \\ = 2kl^2 - 4k^2l + 3lm. \end{aligned}$$

$$(A + B + C) : D = A : D + B : D + C : D.$$

Рис. 329

Чтобы многочлен разделить на одночлен, надо каждый член многочлена разделить на этот одночлен (рис. 329).

Пример 4. Каждый член многочлена $6c^2d + 8d^3$ можно представить произведением двух одночленов, один из которых есть $2d$:

$$6c^2d + 8d^3 = 2d \cdot 3c^2 + 2d \cdot 4d^2.$$

Теперь общий одночлен-множитель $2d$ можно вынести за скобки:

$$2d \cdot 3c^2 + 2d \cdot 4d^2 = 2d(3c^2 + 4d^2).$$

Значит,

$$6c^2d + 8d^3 = 2d(3c^2 + 4d^2).$$

В) Путем вынесения общего множителя за скобки мы представили многочлен $6c^2d + 8d^3$ произведением множителей $2d$ и $3c^2 + 4d^2$. Тожественную замену многочлена произведением двух многочленов называют **разложением многочлена на множители** (рис. 330).

$$6c^2d + 8d^3 = 2d \cdot 3c^2 + 2d \cdot 4d^2 = 2d \cdot (3c^2 + 4d^2)$$

Рис. 330

Пример 5. Разложим на множители многочлен

$$24m^3n^2 - 36m^2n^3 - 12m^3n.$$

Его члены имеют разные общие множители: m^2 ; m ; n ; $4mn$; $-4mn$; $-12m^2n$; $12m^2n$ и др. Обычно множитель, который выносят за скобки, выбирают так, чтобы модули коэффициентов многочлена в скобках не имели общих множителей, кроме чисел 1 и -1 , и чтобы члены многочлена в скобках не имели общего буквенного множителя.

Модулями коэффициентов данного многочлена являются числа 24, 36 и 12. Их НОК равно 12. Поэтому коэффициентом общего множителя целесообразно взять 12 или -12 . Переменная m входит в члены многочлена в третьей и второй степенях, поэтому за скобки можно вынести m^2 . Поскольку переменная n в членах многочлена содержится во второй, третьей и первой степенях, то за скобки выносятся n . Получается, что за скобки есть смысл вынести одночлен $12m^2n$ или $-12m^2n$. Разделив все члены данного многочлена на общий множитель $-12m^2n$, получим второй множитель произведения:

$$(24m^3n^2 - 36m^2n^3 - 12m^3n) : (-12m^2n) = -2mn + 3n^2 + m.$$

Таким образом,

$$24m^3n^2 - 36m^2n^3 - 12m^3n = -12m^2n(-2mn + 3n^2 + m).$$

Чтобы вынести общий множитель членов многочлена за скобки, надо:

- выделить этот общий множитель;
- делением членов многочлена на общий множитель найти многочлен, который записывается в скобках.

Г) Пример 6. Решим уравнение $2y^2 - 7y = 0$.

Для этого в левой части уравнения вынесем за скобки общий множитель y :

$$y(2y - 7) = 0.$$

Теперь учтем, что произведение равно нулю тогда и только тогда, когда равен нулю хотя бы один из множителей (рис. 331):

$$y = 0 \text{ или } 2y - 7 = 0.$$



$AB = 0$ равнозначно $A = 0 \text{ или } B = 0$

Рис. 331

Второе уравнение имеет корень $y = 3,5$.

Таким образом, произведение $y(2y - 7)$ равно нулю при $y = 0$ и при $y = 3,5$. Это означает, что уравнение $2y^2 - 7y = 0$ имеет два корня — числа 0 и 3,5.

Ответ: 0 и 3,5.

Записи при решении таких уравнений могут быть и более краткими.

Пример 7. Решим уравнение $7s^2 - 4s = 0$. Получим:

$$7s^2 - 4s = 0;$$

$$s(7s - 4) = 0;$$

$$s = 0 \text{ или } 7s - 4 = 0;$$

$$s = 0 \text{ или } s = \frac{4}{7}.$$

Ответ: 0 и $\frac{4}{7}$.

- ?**
1. Как многочлен разделить на одночлен?
 2. Какое тождественное преобразование называют разложением многочлена на множители?
 3. Какое тождественное преобразование многочлена называют вынесением общего множителя за скобки?
 4. Как вынести за скобки общий множитель членов многочлена?
 5. Сформулируйте условие, при котором произведение равно нулю.
 6. Что вы можете сказать о множителях равного нулю произведения?

571. Выполните деление:

- а) $5a : \left(\frac{1}{2}a\right)$; ж) $1,47u : (-2,1u)$;
б) $\left(-\frac{2}{3}t\right) : \left(\frac{2}{7}t\right)$; з) $-14,8w : (3,7w)$;
в) $6b : \left(-\frac{1}{3}b\right)$; и) $20,7pq : (2,3pq)$;
г) $\left(-\frac{5}{12}n\right) : \left(\frac{5}{18}n\right)$; к) $(-2,67rs) : (-8,9rs)$;
д) $4,9x : (7x)$; л) $\frac{2}{3}cd : (-1,5cd)$;
е) $(-12,1k) : (-k)$; м) $-1,75kl : \left(\frac{4}{7}kl\right)$.

572. Выполните деление:

- а) $(7ab^3 + 5a^2b^2) : (7ab)$;
б) $(2x^6y^5 - 4x^5y^4) : (-4x^5y^4)$;
в) $(-24c^5d^6 + 32c^6d^5) : (-8c^3d^4)$;
г) $(-36k^5l^3 - 30k^4l^3) : (12k^3l^3)$;
д) $(12r - 8s - 4) : 4$;
е) $(8u^2 + 12u^3 - 20u^4) : (-10u^2)$;
ж) $(21n - 28nk - 7n^2) : (-7n)$;
з) $(2t^7 - 3t^5 - 4t^3 + 5t) : (2t)$.

573. Выполните деление:

- а) $\left(\frac{1}{2}a^2b - \frac{1}{4}ab^2 + \frac{1}{8}ab\right) : \left(\frac{1}{2}ab\right)$;
б) $\left(\frac{2}{3}x^4y^3 - \frac{3}{4}x^3y^5 - \frac{4}{5}x^5y^6\right) : (-6x^3y^3)$;
в) $\left(\frac{1}{7}m^3n^2 - \frac{2}{7}m^4n^3 + \frac{3}{7}m^2n^5\right) : \left(\frac{6}{7}m^2n^2\right)$;
г) $(0,02c^5 - 0,04c^4 + 0,06c^3 - 0,08c^2) : (0,01c^2)$;
д) $(-1,05z^{10} + 13,3z^8 - 18,9z^6 - 25,9z^4) : (70z^3)$;
е) $\left(\frac{3}{7}k^3y^3 - \frac{6}{7}k^4y^4 + \frac{9}{14}k^6y^6 - \frac{15}{14}k^7y^7\right) : \left(\frac{3}{7}k^2y^2\right)$;
ж) $\left(-\frac{2}{9}l^3x^5 - \frac{4}{9}l^4x^6 + \frac{8}{9}l^6x^8 - 1\frac{1}{9}l^8x^{10}\right) : \left(\frac{2}{27}l^2x^4\right)$;
з) $(z^2 - 2z^3 + 3z^4 - 4z^5 + 5z^6 - 6z^7) : (-3z)$.

574. Выразите произведением многочлен:

а) $x^4 - 2x^2$;	ж) $i^2j - ij^2$;
б) $2c^2 + 7c^5$;	з) $m^2n^3 - m^3n^2$;
в) $7y^4 - 21y^2$;	и) $9y^5 - 12y^4 - 3y^3$;
г) $15k^7 + 10k^4$;	к) $5a - 10ab + 20ac$;
д) $t^5 - 3t^4$;	л) $4vw + 8uw - 6w$;
е) $8z + 16z^2$;	м) $7fgh + 21ghi - 7fghi$.

575. Найдите значение выражения:

- а) $0,13t^2 + t^3$ при $t = 0,87$; $-1,13$; $2,87$ (рис. 332);
б) $c^2 - 5,56c$ при $c = -4,44$; $4,56$; $6,56$;
в) $x^3 - ax^2$ при $x = -2,37$ и $a = 7,63$; $x = 2,37$ и $a = 1,37$;
г) $z^3 + bz^2$ при $b = -5,03$ и $z = 7,03$; $b = -2,97$ и $z = -7,03$;
 $b = 10,03$ и $z = -7,03$;
д) $km^2 + m^3$ при $k = 8,47$ и $m = 1,53$; $k = -8,47$ и $m = -1,53$; $k = 6,53$ и $m = -1,53$.

$$0,13t^2 + t^3 = t^2(0,13 + t);$$

$$t = 0,87;$$

$$(0,87)^2(0,13 + 0,87) = 0,7569 \cdot 1 = 0,7569.$$

Рис. 332

576. Упростите:

- а) $(z^2 - 3xz) \cdot 7z^2 - (12x^3z - 16x^2z^5) : (4x^2z)$;
б) $(21k^2l^3 - 28k^4l^4) : (7k^2l) - (4 + 3k^2l) \cdot l^2$;
в) $(b^2 - ab) : b + (a - b) - (a^2 - ab) : a$;
г) $14\left(\frac{3}{7}v - 1\right) + (-18v^2 + 6v) : (-6v) + (-2v + 3)$;
д) $-6\left(\frac{1}{6}y - \frac{5}{12}\right) + (12y^2 - 6y) : (-3y) - (y - 3)$;
е) $-3(2 - u - u^2) + 5(1 + u - 3u^2) - (6u^3 - 8u^2 - 2u) : (-2u)$.

577. Решите уравнение:

- а) $4x - 8x^2 = 0$; г) $7,2d + \frac{3}{5}d^2 = 0$;
 б) $7a^2 + 2a = 0$; д) $12m^2 = 6m$;
 в) $5,7c - 1,9c^2 = 0$; е) $2,8w = \frac{7}{12}w^2$.

578. Докажите, что значение выражения:

- а) $18^4 + 18^3$ делится на 19;
 б) $18^4 - 18^3$ делится на 17;
 в) $25^6 + 5^{13}$ делится на 30;
 г) $7^{16} + 49^7$ делится на 350;
 д) $6^{17} - 36^8$ делится на 180;
 е) $11^{30} - 121^{14}$ делится на 120 (рис. 333).

$$\begin{aligned} 11^{30} - 121^{14} &= 11^{30} - (11^2)^{14} = \\ &= 11^{30} - 11^{28} = 11^{28} \cdot (11^2 - 1) = \\ &= 11^{28} \cdot 120. \end{aligned}$$

Произведение $11^{28} \cdot 120$ содержит множитель 120, поэтому делится на 120. Значит, на 120 делится и выражение $11^{30} - 121^{14}$.

Рис. 333

579. Запишите формулы для площадей пяти прямоугольников на рисунке 334. Вычислите эти площади для $a = 20$ см, $b = 15$ см.

580. Значения переменных m и n выбрали так, что значением выражения $m - 2n$ стало число $\frac{1}{3}$. Найдите при этих значениях переменных m и n значение выражения:

- а) $(m - 2n)^2$; г) $\frac{3}{2n - m}$; ж) $(m - 2n)^3$;
 б) $(2n - m)^2$; д) $\frac{2n - m}{\frac{2}{3}}$; з) $(2n - m)^3$ (рис. 335).
 в) $2n - m$; е) $-6(2n - m)$;

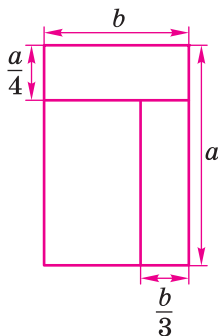


Рис. 334

$$(2n - m)^3 = (-(m - 2n))^3 = -(m - 2n)^3 = -\left(\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}.$$

Рис. 335

581. Запишите и упростите выражение, являющееся суммой:

- а) четырех последовательных натуральных чисел, большее из которых есть число n ;
- б) трех последовательных натуральных чисел, большее из которых есть число $n - 1$;
- в) пяти последовательных натуральных чисел, большее из которых есть число $n - 3$;
- г) пяти последовательных натуральных чисел, большее из которых есть число $n + 3$.

582. Докажите, что при любом значении переменной:

- а) сумма выражений $2(3x - 8) - x(3x - 8)$ и $x(3x - 11) - (3x - 11)$ принимает значение, равное 5;
- б) значение суммы $a(2a - 3) + 5(2a - 3)$ меньше значения суммы $\frac{2}{3}a(6a - 1) + 1\frac{5}{18}(6a - 1)$.

583. Решите уравнение:

а) $\frac{3a + 5}{3} - \frac{7a + 11}{9} = 0$; б) $\frac{19 - 3x}{7} + \frac{7x + 12}{8} = 6$.

584. Найдите три последовательных нечетных числа, зная, что произведение второго и первого из них на 116 меньше произведения второго и третьего чисел.

585. Определите, сколько воды нужно:

- а) испарить из 500 кг целлюлозной массы, содержащей 90 % воды, чтобы получить массу с содержанием воды 50 %;

б) долить к 5-процентному раствору, содержащему 40 г соли, чтобы получить 4-процентный раствор.

586. Постройте треугольник по стороне MN и углам M и N , учитывая, что:

- а) $MN = 45$ мм, $\angle M = 36^\circ$ и $\angle N = 60^\circ$;
- б) $MN = 6,2$ см, $\angle M = 90^\circ$ и $\angle N = 15^\circ$;
- в) $MN = 0,57$ дм, $\angle M = 125^\circ$ и $\angle N = 45^\circ$.

Найдите величину третьего угла построенного треугольника.

587. В пределах Шкловского района Днепр имеет три притока — Березовку, Черницу, Артисловку. Длина Березовки на 2 км меньше удвоенной длины Черницы, на 8 км меньше удвоенной длины Артисловки и на 12 км больше длины Черницы. Найдите длины этих притоков Днепра.

588. В общежитии есть 90 комнат с одним количеством мест и 30 комнат с другим количеством, причем первое количество мест на два больше. Найдите эти количества мест, учитывая, что во всех комнатах первого вида в 6 раз больше мест, чем во всех комнатах второго вида.

589. Света купила 20 DVD-дисков и 15 CD-дисков, причем на приобретение DVD-дисков было затрачено на 55 000 р. больше. Учитывая, что цена DVD-диска на 2000 р. больше цены CD-диска, найдите цену DVD-диска и цену CD-диска.

590. Света купила DVD-диски по 5500 р. и CD-диски по 3500 р., причем на DVD-диски было затрачено на 102 500 р. больше. Учитывая, что количество DVD-дисков на 15 больше количества CD-дисков, найдите количество DVD-дисков и количество CD-дисков.

591. По следующим сведениям определите год, с которого известен город Шклов. Этот год является четырехзначным числом, равным произведению двух простых множителей, один из которых однозначный, а второй — на 2 больше увеличенного в 61 раз однозначного множителя.

592. Докажите, что остаток от деления простого числа на 30 есть также простое число или 1.

593. В строчку записано 50 таких чисел, что сумма любых трех соседних из них положительна. Можно ли утверждать, что сумма всех записанных чисел положительна?

18. Формулы сокращенного умножения

А) Представим многочленом выражение $(a + b)^2$. Для этого запишем его произведением $(a + b)(a + b)$ и выполним умножение:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Таким образом,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Полученную формулу называют **формулой квадрата суммы**. Ее иллюстрирует рисунок 336.

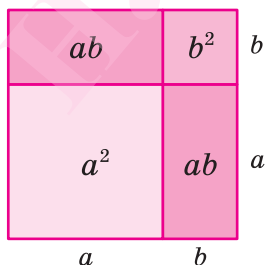


Рис. 336

Квадрат суммы двух выражений равен квадрату первого выражения плюс удвоенное произведение первого выражения на второе плюс квадрат второго выражения.

Представим многочленом выражение $(a - b)^2$. Получим:

$$\begin{aligned} (a - b)^2 &= (a - b)(a - b) = \\ &= a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2. \end{aligned}$$

Таким образом,

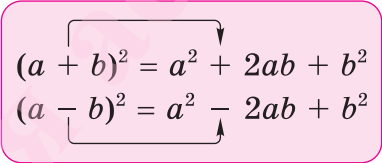
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Полученную формулу называют **формулой квадрата разности**.

Квадрат разности двух выражений равен квадрату первого выражения минус удвоенное произведение первого выражения на второе плюс квадрат второго выражения.

Формулу квадрата разности можно получить из формулы квадрата суммы, рассматривая разность $a - b$ как алгебраическую сумму $a + (-b)$:

$$\begin{aligned}(a - b)^2 &= (a + (-b))^2 = \\ &= a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = \\ &= a^2 - 2ab + b^2 \text{ (рис. 337).}\end{aligned}$$


$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

Б) Выполним умножение разности $a - b$ двух выражений на их сумму $a + b$.
Получим:

$$(a - b)(a + b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

Значит,

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

Полученную формулу называют **формулой разности квадратов**.

Произведение разности двух выражений на их сумму равно разности квадратов этих выражений.

Формулы квадрата суммы, квадрата разности и разности квадратов являются тождествами, в них a и b обозначают любые выражения. Рассмотрим примеры применения этих тождеств.

Пример 1. Представим многочленом выражение $(10a + 5)^2$. По формуле квадрата суммы получаем:

$$\begin{aligned}(10a + 5)^2 &= (10a)^2 + 2 \cdot 10a \cdot 5 + 5^2 = \\ &= 100a^2 + 100a + 25.\end{aligned}$$

Пример 2. Вычислим 2009^2 . Учтывая, что $2009 = 2000 + 9$, получаем:

$$\begin{aligned}2009^2 &= (2000 + 9)^2 = 4\,000\,000 + 36\,000 + 81 = \\ &= 4\,036\,081.\end{aligned}$$

Пример 3. Найдем 998^2 . Учтем, что $998 = 1000 - 2$. Получаем:

$$\begin{aligned}998^2 &= (1000 - 2)^2 = \\ &= 1\,000\,000 - 4000 + 4 = 996\,004.\end{aligned}$$



1. Запишите формулу квадрата суммы и дайте ее словесную формулировку.
2. Запишите формулу квадрата разности и дайте ее словесную формулировку.
3. Запишите формулу разности квадратов и дайте ее словесную формулировку.

594. Прочитайте запись, упростите ее и прочитайте результат:

а) $(a + 3)^2$;	г) $(2 + k)^2$;	ж) $(2x + y)^2$;
б) $(1 - x)^2$;	д) $(m - n)^2$;	з) $(2x - 3y)^2$;
в) $(c + d)^2$;	е) $(3b - 1)^2$;	и) $(7l - 4m)^2$.

595. Учтывая, что $(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b)$ и $(a - b)^3 = (a - b)^2(a - b)$, представьте многочленами куб суммы и куб разности двух слагаемых a и b . Вы получите формулы куба суммы и куба разности. Дайте словесные формулировки этих тождеств.

596. Используя формулу куба суммы $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, докажите формулу куба разности $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

597. Представьте объемы тел на рисунке 338 и результат их сравнения запишите формулой.

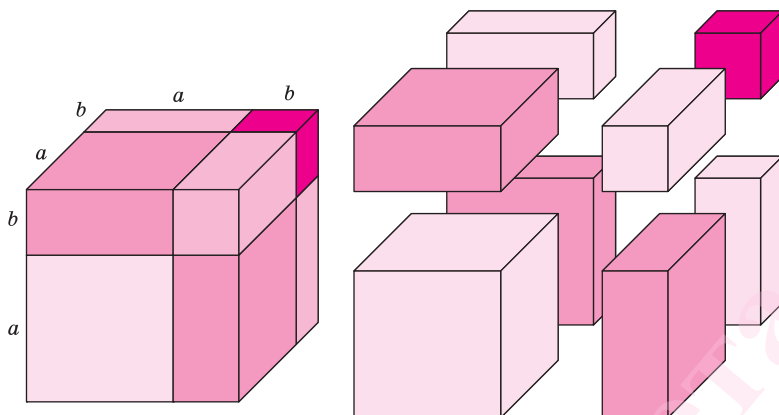


Рис. 338

598. Представив многочленами произведения $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$ и $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$, получите формулы суммы кубов и разности кубов. Используя рисунок 339, дайте словесные формулировки этих тождеств.

<i>Неполный квадрат разности</i> $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$ <i>Неполный квадрат суммы</i>

Рис. 339

599. Используя формулу суммы кубов $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, докажите формулу разности кубов $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

600. Прочитайте словами выражение:

а) $(a - t)^2$;	д) $u^3 + (2v)^3$;
б) $(a + 5)^2$;	е) $s^2 - t^2$;
в) $(1 - m)^3$;	ж) $(s + k)(s - k)$;
г) $(m + 2n)^3$;	з) $k^2 + 2k + 1$;

$$\begin{array}{ll} \text{и)} p^2 + f^2 - 2pf; & \text{л)} (s - t)(s^2 + st + t^2); \\ \text{к)} (m + n)(m^2 - mn + n^2); & \text{м)} (s + k)^2(s - k)^2. \end{array}$$

601. Запишите многочленом выражение:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} (t - 6)^2; & \text{д)} (u + 10v)^2; & \text{и)} (3,1 + f)^2; \\ \text{б)} (a + 7)^2; & \text{е)} (16s - v)^2; & \text{к)} \left(\frac{2}{3} - g\right)^2; \\ \text{в)} (11 - p)^2; & \text{ж)} (s + 0,1)^2; & \text{л)} \left(\frac{2}{3}i + \frac{3}{4}\right)^2; \\ \text{г)} (2m + 3n)^2; & \text{з)} (k + 2,5)^2; & \text{м)} \left(\frac{2}{7}m - \frac{7}{11}\right)^2. \end{array}$$

602. Преобразуйте в многочлен выражение:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} (2s + 5)^2; & \text{ж)} \left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}\right)^2; & \text{и)} (0,4p - 0,5q)^2; \\ \text{б)} (8 - 7a)^2; & \text{з)} \left(\frac{1}{2}k - \frac{1}{3}i\right)^2; & \text{о)} (0,2a + 0,8z)^2; \\ \text{в)} (12 + 7i)^2; & \text{и)} \left(\frac{u}{3} + \frac{v}{6}\right)^2; & \text{п)} (10b - 0,1b^2)^2; \\ \text{г)} (7f - 4g)^2; & \text{к)} \left(5i - \frac{1}{5}j\right)^2; & \text{р)} (12w^2 + 1,2w)^2; \\ \text{д)} \left(d - \frac{2}{7}\right)^2; & \text{л)} \left(\frac{1}{6}m + 3k\right)^2; & \text{с)} \left(1\frac{1}{3}x + \frac{3}{7}z\right)^2; \\ \text{е)} \left(\frac{3}{7} + h\right)^2; & \text{м)} \left(2\frac{1}{3}v + 1\frac{1}{2}v^2\right)^2; & \text{т)} \left(1\frac{1}{3}r - 0,75s^3\right)^2. \end{array}$$

603. Найдите квадраты чисел 15, 25, 35, 45, 55, 65. Проанализируйте полученные результаты. Какую гипотезу о возведении в квадрат чисел, оканчивающихся цифрой 5, вы можете выдвинуть? Попробуйте обосновать свою гипотезу.

604. Выразите многочленом квадрат двучлена:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} (0,5x^2 - 2y)^2; & \text{д)} \left(\frac{3}{4}y^2 - 0,5c^3\right)^2; \\ \text{б)} (4a^2 + 0,3b)^2; & \text{е)} \left(1\frac{2}{3}d^4 + 0,6e^2\right)^2; \\ \text{в)} (2,5z^2 + 1,2z^3)^2; & \text{ж)} \left(\frac{3}{5}i^4j - \frac{2}{3}i^3j^4\right)^2; \\ \text{г)} (2,3b^3 - 1,5b^2)^2; & \text{з)} \left(1\frac{1}{2}k^2i^2 - \frac{4}{9}k^3i^3\right)^2; \end{array}$$

и) $\left(\frac{5}{6}m^2n^3 - \frac{3}{5}mn^2\right)^2$; л) $\left(1\frac{1}{4}r^3s^3 - \frac{4}{5}r^2s^3\right)^2$;
 к) $\left(\frac{2}{3}u^3v^4 - 2\frac{1}{2}u^5v\right)^2$; м) $\left(1\frac{2}{3}j^4k^2 + 1\frac{3}{4}j^3k^3\right)^2$.

605. Используя рисунок 340, докажите тождество

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

606. Замените T таким одночленом, чтобы квадратом двучлена стал трехчлен:

а) $x^2 + 2xy + T$; г) $i^2 + T + 81j^2$;
 б) $a^2 - 14a + T$; д) $T - 112d + 49$;
 в) $4y^2 - T + 9b^2$; е) $T + 30gh + 25h^2$ (рис. 341).

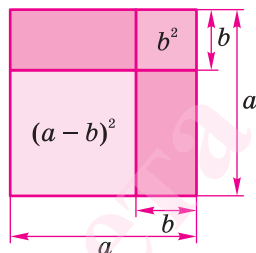


Рис. 340

$$\begin{aligned} T + 30gh + 25h^2 &= T + 30gh + (5h)^2 = T + 2 \cdot 5h \cdot (3g) + (5h)^2 = \\ &= (3g)^2 + 2 \cdot (3g) \cdot (5h) + (5h)^2 = 9g^2 + 30gh + 25h^2; \\ T &= 9g^2. \end{aligned}$$

Рис. 341

607. Выполните действия:

а) $y^2 + 64 - (y - 8)^2$; д) $(a - 4)^2 + a(a + 16)$;
 б) $n^4 - 49 - (n^2 + 7)^2$; е) $(2z + 7)^2 - 7(4z + 7)$;
 в) $14x + (x - 7)^2$; ж) $6c(c - 2) - (2c - 3)^2$;
 г) $(6d - 1)^2 - 36d^2$; з) $5s(4 + s) + (1 - 5s)^2$.

608. Решите уравнение:

а) $(m - 5)^2 - m(m + 6) = 1$;
 б) $8x(2x + 5) - (4x + 1)^2 = 2$;
 в) $a(a + 1) - (a - 6)^2 = 3$;
 г) $18y(2 - 2y) + (6y - 5)^2 = 0$;
 д) $(u - 6)^2 = u(u - 13) - 10$;
 е) $(2s + 1)^2 = 2(2s^2 - 1) - 13$;
 ж) $25z^2 - 3 = (5z - 3)^2$;
 з) $4g + (6g + 2)^2 = 6(3 + 6g^2)$.

609. Прочитайте запись, упростите ее и прочитайте результат:

- а) $(x + y)(x - y)$; г) $(3 - m)(3 + m)$;
б) $(d - c)(c + d)$; д) $(i - 4j)(4j + i)$;
в) $(v - 7)(v + 7)$; е) $(3e - 2f)(2f + 3e)$.

610. Выполните умножение:

- а) $(k - p)(p + k)$; е) $(10v - 3w)(10v + 3w)$;
б) $(u + 5)(5 - u)$; ж) $(a^2 - b^2)(b^2 + a^2)$;
в) $(4s - 1)(4s + 1)$; з) $(x^3 + y^3)(x^3 - y^3)$;
г) $(6 + 5y)(5y - 6)$; и) $(f^5 + 10)(f^5 - 10)$;
д) $(7g + 9h)(9h - 7g)$; к) $(2z^2 - t^3)(t^3 + 2z^2)$.

611. Выразите многочленом произведение:

- а) $(m^2 - n^3)(m^2 + n^3)$;
б) $(3u^4 - v^2)(v^2 + 3u^4)$;
в) $\left(\frac{3}{4}c + 0,7d\right)\left(0,7d - \frac{3}{4}c\right)$;
г) $\left(1,2c - 1\frac{1}{6}r\right)\left(1,2c + 1\frac{1}{6}r\right)$;
д) $\left(2\frac{1}{3}m - \frac{2}{3}n\right)\left(2\frac{1}{3}m + \frac{2}{3}n\right)$;
е) $\left(0,8p^2 + \frac{5}{6}q\right)\left(0,8p^2 - \frac{5}{6}q\right)$;
ж) $(ij + 1,6k^3)(1,6k^3 - ij)$;
з) $(0,4p^3 + 0,5q^4)(0,5q^4 - 0,4p^3)$.

612. Запишите многочленом выражение:

- а) $(a - b)^2(a + b)$; е) $(v + 6)^2(6 - v)^2$;
б) $(m + n)^2(n - m)$; ж) $(z - 1)(z + 1)(z^2 + 1)$;
в) $(c - 3)^2(c + 3)^2$; з) $(5 - f)(5 + f)(25 + f^2)$;
г) $(x + 5)^2(x - 5)^2$; и) $(g^2 + 4)(g + 2)(g - 2)$;
д) $(u - 4)^2(4 + u)^2$; к) $(i^4 + 1)(i^2 + 1)(i^2 - 1)$;
л) $(v^2 + 7)(v^4 - 49)(v^2 - 7)$;
м) $(s^3 - 4)(s^6 + 16)(s^3 + 4)$ (рис. 342).

$$\begin{aligned}
 & (s^3 - 4)(s^6 + 16)(s^3 + 4) = \\
 & = ((s^3 - 4)(s^3 + 4))(s^6 + 16) = \\
 & = ((s^3)^2 - 4^2)(s^6 + 16) = \\
 & = (s^6 - 16)(s^6 + 16) = \\
 & = s^{12} - 256.
 \end{aligned}$$

Рис. 342

613. Выразите многочленом произведение:

- а) $(a + 2b + 3c)(a - 2b + 3c)$;
 б) $(x - 3y - 5z)(x + 3y + 5z)$;
 в) $(i + j + k + l)(i + j - k - l)$;
 г) $(e - f + g + h)(e - f - g - h)$;
 д) $(m^2 + 3)(m^2 + 3m + 3)(m^2 - 3m + 3)$;
 е) $(p + q + r)(p - q + r)(p - q - r)(p + q - r)$;
 ж) $(n + h)^3(n - h)^3$; к) $(m + 2p - 3t)^2$;
 з) $(t + v)^3(t - v)^2$ (рис. 343); л) $(2q - r + 3x)^2$;
 и) $(b + c + d)^2$; м) $(3 - a - z)^2$ (рис. 344).

$$\begin{aligned}
 & (t + v)^3(t - v)^2 = \\
 & = ((t + v)^2(t - v)^2)(t + v) = \\
 & = ((t + v)(t - v))^2(t + v) = \\
 & = (t^2 - v^2)^2(t + v) = \\
 & = (t^4 - 2t^2v^2 + v^4)(t + v) = \\
 & = t^5 + t^4v - 2t^3v^2 - 2t^2v^3 + v^4t + v^5.
 \end{aligned}$$

Рис. 343

$$\begin{aligned}
 & (3 - a - z)^2 = (3 - (a + z))^2 = \\
 & = 3^2 - 6(a + z) + (a + z)^2 = \\
 & = 9 - 6a - 6z + a^2 + 2az + z^2.
 \end{aligned}$$

Рис. 344

614. Решите уравнение:

- а) $(4d - 7)^2 = (4d + 5)(4d - 5) + 67$;
 б) $(3s + 5)(3s - 5) = 9(s - 5)(s + 5)$;
 в) $4y(y + 4) - (2y + 5)(2y - 5) = -7$;
 г) $25c(c - 4) = (5c - 10)(5c + 10)$;

- д) $(6 - x)(6 + x) + (x - 3)^2 = 3$;
 е) $16h(h + 2) - (4h + 3)(4h - 3) = 29$;
 ж) $(5u + 3)(5u - 3) - (5u - 7)^2 = 40$;
 з) $(a + 7)(a - 7) = (6 - a)(a + 6) - 53$.

615. Прочитайте запись, упростите ее и прочитайте результат:

- а) $(i + j)^3$; в) $(2s - p)^3$; д) $(5a - 2b)^3$;
 б) $(a - x)^3$; г) $(q + 4x)^3$; е) $(3b + 4c)^3$.

616. Используя формулу куба суммы $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, упростите выражение:

- а) $(w - 6)^3$; в) $(9 - e)^3$; д) $(0,4 - y)^3$;
 б) $(2,1 + h)^3$; г) $(s + 0,2)^3$; е) $(k + 1,5)^3$.

617. Каждую сторону квадрата уменьшили на 7 мм. В результате получился новый квадрат, площадь которого на 749 мм^2 меньше. Найдите сторону нового квадрата.

618. Докажите, что:

а) если к произведению двух последовательных нечетных натуральных чисел прибавить меньшее из них, то получится число, равное произведению меньшего из данных чисел и следующего за большим (рис. 345);

$2n + 1$ и $2n + 3$ — два последовательных нечетных натуральных числа;

$2n + 4$ — число, следующее за числом $2n + 3$;

$$\begin{aligned} (2n + 1)(2n + 3) + (2n + 1) &= \\ &= 4n^2 + 6n + 2n + 3 + 2n + 1 = \\ &= 4n^2 + 10n + 4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2n + 1)(2n + 4) &= 4n^2 + 8n + 2n + 4 = \\ &= 4n^2 + 10n + 4. \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} (2n + 1)(2n + 3) + (2n + 1) &= \\ &= (2n + 1)(2n + 4). \end{aligned}$$

Рис. 345

б) если к произведению двух последовательных натуральных чисел прибавить большее из них, то получится квадрат большего числа.

619. Вычислите:

- а) $5,1^2$; б) $4,9^2$; в) $5,2^2$; г) $5,01^2$.

620. Возведите в степень:

- а) $(ax)^3$; г) $(-2k^2l^3)^4$; ж) $(2,3u^3v^2w^5)^3$;
б) $(7by)^2$; д) $(0,1i^2jk)^3$; з) $(-3cd^2)^3$;
в) $(2,5mn)^2$; е) $(10ef^2g)^4$; и) $(-1,1y^4z^5)^4$.

621. Вычислите:

- а) $(15 \cdot 3^{2k+1} - 10 \cdot 3^{2k} + 5 \cdot 3^{2k-1}) : (5 \cdot 3^{2k-2})$;
б) $(19 \cdot 14^n - 16 \cdot 2^{n-4} \cdot 7^n - 2^{n+1} \cdot 7^{n+1}) : 14^{n-1}$.

622. Представьте произведением выражение:

- а) $6x^2 + 4x$; в) $9 - n^2$;
б) $4z^2 + 4z + 1$; г) $-a^2 + 2a - 1$.

623. Докажите, что:

- а) разность квадратов двух последовательных натуральных чисел есть нечетное число;
б) для любого натурального числа n значение выражения $(7n - 1)^2 - (2n - 6)^2$ кратно 5.

624. Найдите две точки и постройте на координатной плоскости график зависимости:

- а) $y = -3x + 1$; в) $y = 2x + 2$; д) $y = \frac{6}{5}x + 3$;
б) $y = \frac{1}{3}x + 1$; г) $y = -\frac{1}{2}x + 2$; е) $y = -\frac{5}{6}x + 3$.

625. Докажите, что:

- а) если $a^2 + b^2 = 2$, то $(a + b)(a + b + 2) = 2(a + 1)(b + 1)$;
б) если $a + b = 7$, то $(a + 1)(b + 1) - (a - 1)(b - 1) = 14$;
в) если $ab > 0$, то $(a - c)(b - c) + (a + c)(b + c) > 0$.

626. Один угол четырехугольника в два раза меньше другого, который в три раза меньше третьего. Найдите углы четырехугольника, учитывая, что третий угол больше первого на 125° .

627. Есть два равных треугольника. Докажите, что у них равны средние линии, которые соединяют середины пар соответствующих сторон.

628. (*Задача Бхаскары*¹.) Кто-то сказал своему другу: «Дай мне 100 рупий, и я буду в два раза богаче тебя», на что последний ответил: «Если ты мне дашь только 10 рупий, то я стану в шесть раз богаче тебя». Нужно ответить, сколько рупий было у каждого.

629. Утроенное число жителей городского поселка Смиловичи, находящегося в Червенском районе, на 5,8 тыс. человек больше числа жителей города Червеня, а утроенное число жителей Червеня на 5,2 тыс. человек меньше числа жителей Червенского района. Найдите по отдельности количества жителей Червеня, Смиловичей и Червенского района, учитывая, что в Червенском районе на 20,1 тыс. жителей больше, чем в Червене и Смиловичах вместе.

630. Покооть, Чечера, Колпита — реки, протекающие по Чечерскому району. Площади водосборов Покооти и Колпиты относятся как $56 : 61$, площадь водосбора Чечеры на 2 км^2 больше площади водосбора Колпиты и вместе с площадью водосбора Покооти составляет 1055 км^2 . Найдите площади водосборов этих рек.

631. Токарь изготовил 96 деталей, а его ученик — 16 деталей, при этом суммарная продолжительность их работы составила 12 ч. Найдите производительность труда токаря и ученика, учитывая, что токарь изготавливает в час в 3 раза больше деталей, чем ученик.

¹ Ачарья Бхаскара (1114 г. — после 1178 г.) — индийский математик.

632. В магазине было продано 120 пачек одного вида мороженого и 70 пачек другого, причем общая выручка составила 1 215 000 р. Учитывая, что цены пачки первого и второго видов мороженого относятся как 5 : 3, найдите эти цены.

633. В магазине продавали пачки мороженого по цене 5700 р. и по цене 4800 р., причем общая выручка составила 1 548 000 р. Учитывая, что количества проданных пачек первого и второго видов мороженого относятся как 2 : 3, найдите эти количества.

* * *

634. Проводится шахматный турнир по переписке, в котором все партии играют одновременно. Сведения о результатах законченных партий сообщаются судье, который заносит их в турнирную таблицу. Докажите, что количество участников, сыгравших нечетное число партий, в любой момент четное.

635. Квадрат натурального числа содержит нечетное количество десятков. Найдите цифру единиц этого квадрата.

636. Докажите, что для каждого натурального числа n существует число вида $11...100...0$, делящееся на n без остатка.

19. Разложение многочлена на множители

А) Многочлен, все члены которого имеют общий множитель, можно разложить на множители, если вынести общий множитель за скобки. Можно разложить на множители и некоторые многочлены, члены которых не имеют общего множителя.

Пример 1. Разложим на множители многочлен $a^2 - 2ab - 3a + 6b$. Для этого сгруппируем его члены так, чтобы в каждой группе можно было вынести за скобки определенный множитель:

$$a^2 - 2ab - 3a + 6b = (a^2 - 2ab) + (-3a + 6b).$$

В каждой группе вынесем общий множитель за скобки:

$$(a^2 - 2ab) + (-3a + 6b) = a(a - 2b) - 3(a - 2b).$$

Теперь можно вынести за скобки общий множитель $a - 2b$:

$$a(a - 2b) - 3(a - 2b) = (a - 2b)(a - 3).$$

Получим:

$$a^2 - 2ab - 3a + 6b = (a - 2b)(a - 3).$$

Использованный в этом примере способ разложения многочлена на множители называют **способом группировки**.

При разложении на множители многочлена $a^2 - 2ab - 3a + 6b$ его члены можно сгруппировать и иначе:

$$\begin{aligned} a^2 - 2ab - 3a + 6b &= (a^2 - 3a) - (2ab - 6b) = \\ &= a(a - 3) - 2b(a - 3) = (a - 3)(a - 2b). \end{aligned}$$

Пример 2. Разложим на множители многочлен $a^2x - 3axy - 6y^2 + 2ay + 9y - 3a$. Для этого сгруппируем первый, четвертый и шестой члены, а также второй, третий и пятый члены:

$$\begin{aligned} a^2x - 3axy - 6y^2 + 2ay + 9y - 3a &= \\ &= (a^2x + 2ay - 3a) - (3axy + 6y^2 - 9y) = \\ &= a(ax + 2y - 3) - 3y(ax + 2y - 3) = \\ &= (ax + 2y - 3)(a - 3y). \end{aligned}$$

Б) Формулы

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

называют **формулами сокращенного умножения**. Формулы сокращенного умножения, записанные в виде

$$\begin{aligned}a^2 + 2ab + b^2 &= (a + b)^2, \\a^2 - 2ab + b^2 &= (a - b)^2, \\a^2 - b^2 &= (a + b)(a - b),\end{aligned}$$

можно использовать для разложения многочлена на множители.

Пример 3. Разложим на множители выражение $36a^2 + 60a + 25$. Обратим внимание на то, что первое слагаемое является квадратом выражения $6a$, третье — квадратом числа 5, а второе — их удвоенным произведением. Поэтому данное выражение можно представить квадратом суммы выражений $6a$ и 5:

$$36a^2 + 60a + 25 = (6a)^2 + 2 \cdot 6a \cdot 5 + 5^2 = (6a + 5)^2.$$

Сумму квадратов двух выражений, увеличенную на их удвоенное произведение, можно записать квадратом суммы этих выражений (рис. 346).

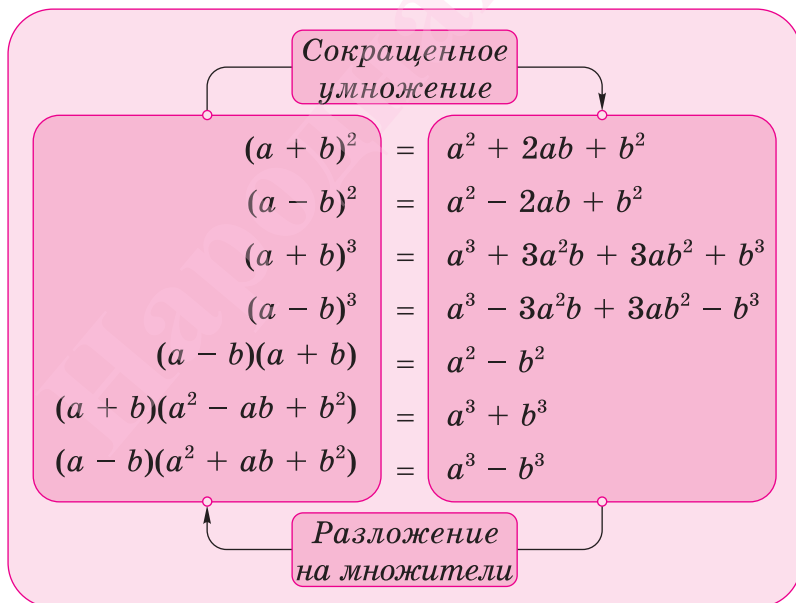


Рис. 346

Пример 4. Разложим на множители трехчлен $4x^2 - 28xy + 49y^2$. Поскольку $4x^2 = (2x)^2$, $49y^2 = (7y)^2$ и $28xy = 2 \cdot 2x \cdot 7y$, то

$$4x^2 - 28xy + 49y^2 = (2x - 7y)^2.$$

Сумму квадратов двух выражений, уменьшенную на их удвоенное произведение, можно записать квадратом разности этих выражений.

Пример 5. Разложим на множители двучлен $64 - 9t^4$. Поскольку $64 = 8^2$ и $9t^4 = (3t^2)^2$, то

$$64 - 9t^4 = 8^2 - (3t^2)^2 = (8 - 3t^2)(8 + 3t^2).$$

Разность квадратов двух выражений можно записать произведением разности этих выражений на их сумму.

При разложении на множители можно использовать и другие формулы-тождества, например формулы

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3,$$

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3,$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2),$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \text{ (см. рис. 346)}.$$

В) Мы рассмотрели отдельные способы разложения многочленов на множители — *вынесение общего множителя за скобки, группировку членов многочлена, использование формул сокращенного умножения*. На практике при разложении многочленов на множители эти способы чаще всего приходится сочетать.

Пример 6. Разложим на множители многочлен

$$a^3b - 3a^2b + 2a^3 - 6a^2.$$

Члены многочлена имеют общий множитель a^2 , поэтому вынесем его за скобки:

$$a^3b - 3a^2b + 2a^3 - 6a^2 = a^2(ab - 3b + 2a - 6).$$

Теперь попробуем разложить на множители многочлен

$$ab - 3b + 2a - 6,$$

используя группировку его членов:

$$\begin{aligned} ab - 3b + 2a - 6 &= (ab + 2a) - (3b + 6) = \\ &= a(b + 2) - 3(b + 2) = (b + 2)(a - 3). \end{aligned}$$

Значит, окончательно:

$$a^3b - 3a^2b + 2a^3 - 6a^2 = a^2(b + 2)(a - 3).$$

Пример 7. Разложим на множители многочлен

$$4m^2 - 12mn + 9n^2 - 16k^2.$$

Сгруппировав первые три члена многочлена, получаем трехчлен, являющийся квадратом разности выражений $2m$ и $3n$. Поэтому

$$\begin{aligned} 4m^2 - 12mn + 9n^2 - 16k^2 &= (4m^2 - 12mn + 9n^2) - 16k^2 = \\ &= (2m - 3n)^2 - (4k)^2. \end{aligned}$$

Выражение $(2m - 3n)^2 - (4k)^2$ можно разложить на множители по формуле разности квадратов:

$$(2m - 3n)^2 - (4k)^2 = (2m - 3n + 4k)(2m - 3n - 4k).$$

Окончательно:

$$4m^2 - 12mn + 9n^2 - 16k^2 = (2m - 3n + 4k)(2m - 3n - 4k).$$

Разложение многочлена на множители, другие тождественные преобразования используют для упрощения вычислений, решения уравнений, других задач.

Г) Задача 1. Докажем, что площадь треугольника можно найти как половину произведения основания этого треугольника на высоту, проведенную к этому основанию.

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} a \cdot h.$$

Сначала докажем, что площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.

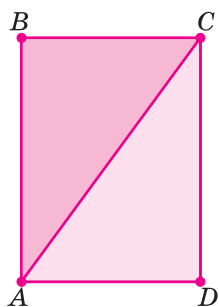


Рис. 347

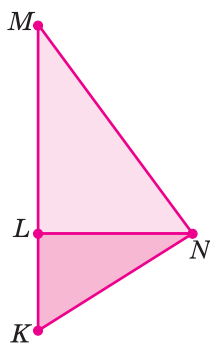


Рис. 348

На рисунке 347 показан прямоугольник $ABCD$. Диагональ AC разделяет его на два равных треугольника ABC и ADC . Действительно, оба они прямоугольные и катеты AB и BC треугольника ABC соответственно равны катетам DC и AD треугольника ADC , так как эти катеты — противоположные стороны прямоугольника.

Поскольку треугольники ABC и ADC равны, то равны и их площади, и каждая из них равна половине площади прямоугольника, т. е. $\frac{1}{2}AD \cdot DC$.

Рассмотрим теперь произвольный треугольник MNK (рис. 348). Выберем в качестве основания сторону MK и к ней проведем высоту NL . Треугольник MNK разделится на два прямоугольных треугольника MNL и KNL . Площадь треугольника MNK равна сумме площадей треугольников MNL и KNL :

$$S_{MNK} = S_{MNL} + S_{KNL}.$$

Запишем площади треугольников MNL и KNL :

$$S_{MNL} = \frac{1}{2} ML \cdot NL; \quad S_{KNL} = \frac{1}{2} LK \cdot NL.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} S_{MNK} &= \frac{1}{2} ML \cdot NL + \frac{1}{2} LK \cdot NL \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2} (ML + LK) \cdot NL \stackrel{(2)}{=} \\ &= \frac{1}{2} MK \cdot NL. \end{aligned}$$

Здесь при переходе (1) использовано вынесение за скобки общих множителей $\frac{1}{2}$ и NL , а при переходе (2) — то, что $ML + LK = MK$.

Д) **Задача 2. Докажем, что квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов его катетов.**

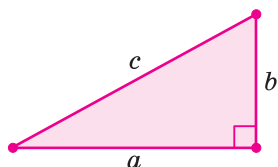


Рис. 349

Вырежем четыре прямоугольных треугольника с катетами a и b ($a > b$) и гипотенузой c (рис. 349)

и сложим их так, как показано на рисунке 350. Тогда гипотенузы этих треугольников образуют квадрат. Действительно, все стороны четырехугольника $EFGH$ равны гипотенузе c , а каждый угол образован из двух острых углов прямоугольного треугольника, которые вместе составляют угол в 90° .

Квадрат $EFGH$ состоит из четырех треугольников с катетами a и b и квадрата со стороной $a - b$. Поэтому можем записать:

$$c^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} ab + (a - b)^2.$$

Упростим выражение в правой части этого равенства:

$$c^2 = 2ab + a^2 - 2ab + b^2; \quad c^2 = a^2 + b^2.$$

Получили формулу, которая выражает известную теорему Пифагора.

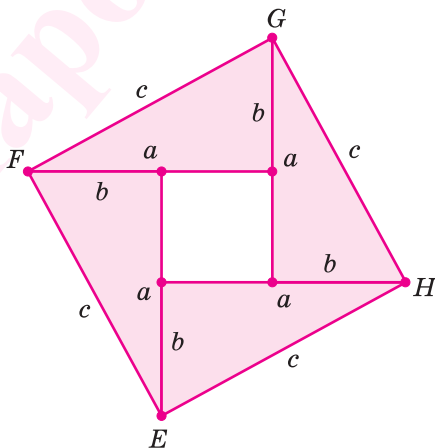


Рис. 350



Рис. 351

Пифагор (около 570 г. до н. э. — около 500 г. до н. э.) (рис. 351) — древнегреческий мыслитель. Теорема, носящая его имя, была известна вавилонянам за 1200 лет до Пифагора. Пифагор, скорее всего, нашел доказательство этого утверждения. Теперь известно более ста доказательств этой теоремы.

Теорема Пифагора дает возможность находить длину гипотенузы прямоугольного треугольника по известным длинам его катетов, а также находить длину катета по известным длинам гипотенузы и другого катета.

- ?** 1. На примере $b^2x + 2bx - b - 2$ объясните сущность разложения многочлена на множители способом группировки.
2. Какие формулы называют формулами сокращенного умножения?
3. Запишите формулу квадрата суммы в том виде, в котором она используется при разложении многочлена на множители. Прочитайте ее словами.
4. Запишите формулу квадрата разности в том виде, в котором она используется при разложении многочлена на множители. Прочитайте ее словами.

637. Представьте произведением многочлен:

а) $a^3 + a^2 + a + 1$;	з) $13d - cd + 13c - c^2$;
б) $x^6 - x^4 - x^2 + 1$;	и) $64 - 8g - 8g^2 + g^3$;
в) $b^3 - 3b^2 + 3b - 9$;	к) $s^3 - 49 - 7s^2 + 7s$;
г) $y^5 + 3y^3 - y^2 - 3$;	л) $7v^2 - 3uv - 28vu + 12u^2$;
д) $c^6 - 7c^4 - 2c^2 + 14$;	м) $4ij - j^2 - 12ci + 3cj$;
е) $z^6 - az - 5z^5 + 5a$;	н) $9d^2 - 11ad + 18da - 22a^2$;
ж) $n^3 - 4mn + n^2 - 4m$;	о) $11h^3 - 13h^2g - 39g + 33h$.

638. Представьте произведением многочлен:

- а) $a^2b^3 + ab - a^3b^4 - a^2b^2$;
- б) $x^2y^3 - xy - x^4y^5 + x^3y^3$;
- в) $3u^3v^2 - 6u^3v^3 - 4u^2v^3 + 8u^2v^4$;

- г) $4z^4 - 4z^3 + 3z^2 - 3z$;
 д) $12u^2v + 15x^4 - 15u^2x - 12vx^3$;
 е) $16ij^2 + 24jk^2 - 24ik^2 - 16j^3$;
 ж) $10c^4d^3 - 8c^3d^4 + 5c^2d^3 - 4cd^4$;
 з) $2m^4n - 6m^5n^2 - 3m^2n^2 + 9m^3n^3$.

639. Разложите на множители многочлен:

- а) $a^2b + a + ab^2 + b + 2ab + 2$;
 б) $cx^2 - dx^2 - dx + cx - c + d$;
 в) $cx^2 + dx^2 - dx - cx + c + d$;
 г) $pz^2 + qz^2 + pz - rz^2 + qz - rz$;
 д) $pz^2 + qz^2 - qz - pz + rz^2 - rz$;
 е) $m^5 - m^4 + m^3 - m^2 + m - 1$;
 ж) $w^5 + w^4 - w^3 - w^2 + w + 1$;
 з) $m^2 - mn + m - mn^2 + n^3 - n^2$.

640. Найдите значение выражения:

- а) $a^2b^3 - b^4 - a^3 + ab$ при $a = 2$ и $b = 3$; $a = -2$ и $b = -3$;
 $a = 3$ и $b = 2$; $a = -3$ и $b = -2$;
 б) $x^2 - xy - 9x + 9y$ при $x = 9$ и $y = 9$; $x = -9$ и $y = 9$;
 $x = 9$ и $y = -9$; $x = -9$ и $y = -9$;
 в) $3bu - 5cv + 5bv - 3cu$ при $b = \frac{5}{6}$, $c = \frac{2}{3}$, $u = 6$ и $v = 3$;
 $b = -\frac{5}{6}$, $c = \frac{2}{3}$, $u = -6$ и $v = -3$;
 г) $2m - m^2n - 2n + mn^2$ при $m = 2\frac{1}{3}$ и $n = \frac{3}{7}$; $m = -2\frac{1}{3}$
 и $n = -2\frac{1}{3}$; $m = 20$ и $n = -13$;
 д) $q^2p - 3qp^2 - 3q + 9p$ при $p = \frac{2}{3}$ и $q = 3$; $p = \frac{3}{7}$ и $q = 4$;
 $p = 2\frac{2}{3}$ и $q = 12$ (рис. 352).

$$\begin{aligned} q^2p - 3qp^2 - 3q + 9p &= (q^2p - 3qp^2) - (3q - 9p) = \\ &= qp(q - 3p) - 3(q - 3p) = (q - 3p)(qp - 3); \\ p &= 2\frac{2}{3}; q = 12; \left(12 - 3 \cdot 2\frac{2}{3}\right) \left(12 \cdot 2\frac{2}{3} - 3\right) = \\ &= (12 - 8)(32 - 3) = 4 \cdot 29 = 116. \end{aligned}$$

Рис. 352

641. Представьте квадратом двучлена трехчлен:

а) $4a^2 + 12a + 9$;	ж) $\frac{1}{9}t^2 + 9s^2 - 2st$;
б) $36x^2 + 12x + 1$;	з) $9f^2 + 24f + 16$;
в) $25b^2 - 10b + 1$;	и) $81k^2 + l^2 - 18kl$;
г) $81 + 18y + y^2$;	к) $36u^2 + v^2 + 12uv$;
д) $9c^2 + 24cd + 16d^2$;	л) $10gh + 0,25g^2 + 100h^2$;
е) $100 - 60z + 9z^2$;	м) $\frac{1}{4} + e^2 + e$ (рис. 353).

$$\frac{1}{4} + e^2 + e = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + e^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot e = \left(\frac{1}{2} + e\right)^2.$$

Рис. 353

642. Разложите на множители выражение:

а) $(5 - 12x)^2 - 1$;	ж) $(7u - 9)^2 - 361$;
б) $m^2 - (2m + 1)^2$;	з) $400 - (3v - 17)^2$;
в) $(3y + 4)^2 - 4$;	и) $(3i^2 - 3j^2)^2 - 1$;
г) $256 - (b + 1)^2$;	к) $(5q^2 + 7r^3)^2 - 4$;
д) $(4c - 5)^2 - 289$;	л) $(g^2 + h^2)^2 - 4g^2h^2$ (рис. 354);
е) $324 - (z - 11)^2$;	м) $(v - w^4)^2 - 25v^2w^2$.

$$\begin{aligned}(g^2 + h^2)^2 - 4g^2h^2 &= (g^2 + h^2)^2 - (2gh)^2 = \\ &= (g^2 + h^2 - 2gh)(g^2 + h^2 + 2gh) = \\ &= (g - h)^2(g + h)^2,\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}(g^2 + h^2)^2 - 4g^2h^2 &= g^4 + 2g^2h^2 + h^4 - 4g^2h^2 = \\ &= g^4 - 2g^2h^2 + h^4 = (g^2 - h^2)^2 = \\ &= ((g - h)(g + h))^2 = (g - h)^2(g + h)^2.\end{aligned}$$

Рис. 354

643. Выделите точный квадрат и разложите на множители выражение:

- а) $x^2 + 3x + 2$; г) $y^2 + 2y - 3$;
 б) $a^2 + 7a - 8$; д) $d^2 - 7d + 6$;
 в) $c^2 + 9c - 10$; е) $z^2 + 12z + 35$ (рис. 355).

$$\begin{aligned} z^2 + 12z + 35 &= z^2 + 2 \cdot z \cdot 6 + 36 - 1 = \\ &= (z + 6)^2 - 1^2 = (z + 6 - 1)(z + 6 + 1) = \\ &= (z + 5)(z + 7). \end{aligned}$$

Рис. 355

644. Разложите на множители выражение:

- а) $25 - 64a^2$; ж) $81i^2j^2 - 1$;
 б) $49x^2 - 9y^2$; з) $d^2 - k^2l^2$;
 в) $64b^2 - 100c^2$; и) $144u^2v^2 - 64w^2$;
 г) $81z^2 - 16t^2$; к) $4f^2g^2 - 4$;
 д) $0,01p^2 - 121q^2$; л) $169 - r^2y^2$;
 е) $64 - m^2n^2$; м) $a^2q^2 - 196x^2$ (рис. 356).

$$\begin{aligned} a^2q^2 - 196x^2 &= (aq)^2 - (14x)^2 = \\ &= (aq - 14x) \cdot (aq + 14x). \end{aligned}$$

Рис. 356

645. Решите уравнение:

- а) $r^2 - 100 = 0$; ж) $1,21 - g^2 = 0$;
 б) $49 - a^2 = 0$; з) $4,62 + z^2 = 0$;
 в) $x^2 + 25 = 0$; и) $9l^2 - 16 = 0$;
 г) $b^2 - 0,01 = 0$; к) $25 - 49s^2 = 0$;
 д) $\frac{4}{25} - y^2 = 0$; л) $36q^2 - 121 = 0$;
 е) $d^2 - \frac{64}{121} = 0$; м) $169u^2 - 144 = 0$.

646. Решите уравнение:

- а) $25a^2 - (5a - 4)^2 = 0$; д) $-7y(y - 2) + 5(y - 2)^2 = 0$;
б) $49x^2 - (4 + 7x)^2 = 0$; е) $3g(2 - g) - 4(g - 2)^2 = 0$;
в) $(3s - 5)^2 - 9s^2 = 0$; ж) $(3s - 2)^2 - (2s - 3)^2 = 0$;
г) $(6b + 9)^2 - 36b^2 = 0$; з) $(4u + 5)^2 - (3u + 5)^2 = 0$.

647. Разложите на множители выражение:

- а) $ax^3 - axy^2$; д) $9p^3 - p$; и) $50u^4v^2 - 32u^2v^4$;
б) $mb^2 - 9mc^2$; е) $g^4 - g^2h^2$; к) $45i^3j^5 - 20i^5j^3$;
в) $6y^2 - 54$; ж) $4f^3 - 4fg^2$; л) $1,21s^3r^3 - sr$;
г) $7d^2 - 112$; з) $0,25q^3 - 16q$; м) $98e^3w - 72ew^3$.

648. Разложите на множители выражение:

- а) $9 - a^2 + 2ab - b^2$; ж) $x^2 - y^2 - x + y$;
б) $16 - x^2 - 2xy - y^2$; з) $e^2 - f^2 + e + f$;
в) $1 - c^2 + 2cd - d^2$; и) $i^3 + i^2j - ij - j^2$;
г) $4 - z^2 - 2zt - t^2$; к) $g^3 - g^2h - gh^2 + h^3$;
д) $4m^2 - 20mn + 25n^2 - 36$; л) $9s^2 - 4r^2 + 4rt - t^2$;
е) $16k^2 - 8kl + l^2 - 81$; м) $25j^2u^2 - 4u^2 + 12up - 9p^2$.

649. Разложите на множители выражение:

- а) $a^4 - a^3 + a - 1$; ж) $-5pq - 40q - 15p - 120$;
б) $x^6 - x^4 + 3x^3 + 3x^2$; з) $rs^4 - s^4 + rs^3 - s^3$;
в) $(c + d)^3 - (c - d)^3$; и) $e^3 - e^2f + e^2 - ef$;
г) $(y + z)^4 - (y - z)^4$; к) $i^2 - ik + jk - ij$;
д) $u^2 - v^2 - u + v$; л) $f^2 - t^2 + 2f + 1$ (рис. 357);
е) $45m + 6n - 3mn - 90$; м) $b^2 - y^2 - 10y - 25$.

$$\begin{aligned} f^2 - t^2 + 2f + 1 &= \\ &= (f^2 + 2f + 1) - t^2 = \\ &= (f + 1)^2 - t^2 = \\ &= (f + 1 - t)(f + 1 + t) = \\ &= (f - t + 1)(f + t + 1). \end{aligned}$$

Рис. 357

650. Разложите на множители выражение (рис. 358):

а) $a^2 - b^2 - a - b$;	ж) $ef^2 - e - f^3 + f$;
б) $u^2 - v^2 - u + v$;	з) $kl^2 + 2k^2 - k^3 - 2l^2$;
в) $r + s + s^2 - r^2$;	и) $t^3 + t^2z - 4z - 4t$;
г) $c^2 - d - d^2 - c$;	к) $g^3 - 5h^2 + 5g^2 - gh^2$;
д) $x - y + x^2 - y^2$;	л) $(i - j^2)^2 + 2ik^3 - 2j^2k^3 + k^6$;
е) $m^2 + n - n^2 + m$;	м) $p^2q^5(p^3 - q) - p^5q^2(q^3 - p)$.

$$\begin{aligned}
 & ef^3 \cdot (e^4 - f^2) + e^3f \cdot (e^2 - f^4) = \\
 & = ef \cdot (f^2(e^4 - f^2) + e^2(e^2 - f^4)) = \\
 & = ef \cdot (e^4f^2 - f^4 + e^4 - e^2f^4) = \\
 & = ef \cdot ((e^4f^2 - e^2f^4) + (e^4 - f^4)) = \\
 & = ef \cdot (e^2f^2(e^2 - f^2) + (e^2 - f^2)(e^2 + f^2)) = \\
 & = ef \cdot (e^2 - f^2)(e^2f^2 + e^2 + f^2) = \\
 & = ef \cdot (e - f)(e + f)(e^2f^2 + e^2 + f^2).
 \end{aligned}$$

Рис. 358

651. Разложите на множители выражение:

- а) $125a^3 + 75a^2 + 15a + 1$;
 б) $27 - 108x + 144x^2 - 64x^3$;
 в) $125i^6 - 150i^4j^2 + 60i^2j^4 - 8j^6$;
 г) $8m^3 + 60m^2 + 150m + 125$.

652. Разложите на множители выражение:

а) $-a^3 + b^3$;	г) $\frac{1}{27}s^3 + 1$;	ж) $-\frac{27}{64} - h^{24}$;
б) $-8 - t^3$;	д) $m^9 + n^6$;	з) $q^{12} + \frac{125}{216}q^6$;
в) $-y^9 + \frac{1}{8}$;	е) $i^{12} - k^9$;	и) $729 - c^6$.

653. Разложите на множители выражение:

а) $a^6 - 2a^3b + b^2$;	в) $125m^3n^6 + 216k^6l^3$;
б) $4c^{10} + 20c^5y^6 + 25y^{12}$;	г) $216d^6f^3 - 125e^3h^9$;

- д) $8i^3 - 60i^2j + 150ij^2 - 125j^3$;
 е) $8p^3 + 72p^2q + 216pq^2 + 216q^3$;
 ж) $u^{12} + u^{10} - u^7 + 2u^6 - u^5 - 2u^{11}$;
 з) $g^2h^2 + b^2c^2 - b^2g^2 - c^2h^2$.

654. Докажите, что:

- а) квадрат любого нечетного числа, уменьшенный на единицу, делится на 8;
 б) разность квадратов двух последовательных нечетных чисел делится на 8;
 в) если каждое из двух последовательных натуральных чисел не делится на 3, то разность квадратов большего и меньшего из этих чисел делится на 3.

655. Вычислите площадь прямоугольного треугольника, учитывая, что его катеты равны:

- а) 6 см и 5 см; г) 2 см и 1,4 см;
 б) 4,6 см и 5 см; д) 4 м и 35 дм;
 в) 1 дм и 8 см; е) 2,7 см и $\frac{2}{9}$ см.

656. Выполните нужные измерения и вычислите площадь треугольника на рисунке:

- а) 359; б) 360; в) 361.

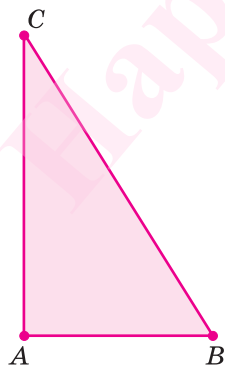


Рис. 359

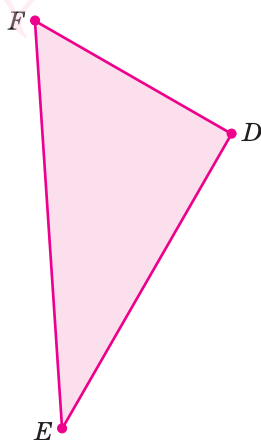


Рис. 360

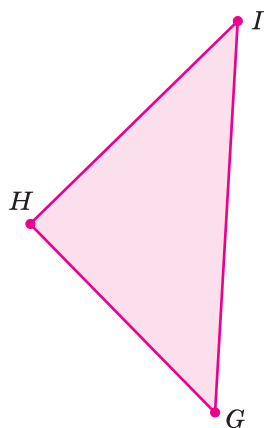


Рис. 361

657. Постройте треугольник MNP по его сторонам NM и NP и углу MNP и найдите его площадь, учитывая, что:

а) $NM = 75$ мм; $NP = 85$ мм; $\angle MNP = 28^\circ$;

б) $NM = 55$ мм; $NP = 73$ мм; $\angle MNP = 41^\circ$;

в) $NM = 51$ мм; $NP = 68$ мм; $\angle MNP = 37^\circ$.

658. Сделайте необходимые измерения и найдите площадь треугольника на рисунке:

а) 362; б) 363; в) 364.

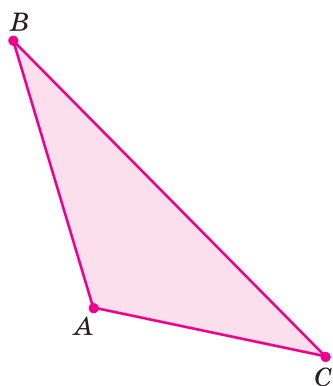


Рис. 362

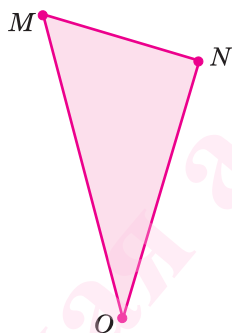


Рис. 363

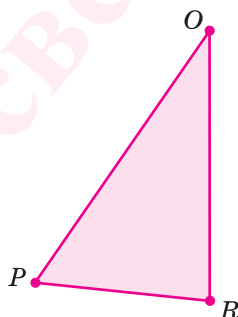


Рис. 364

659. В таблице приведены данные об основании треугольника a , высоте h , проведенной к этому основанию, и его площади S . По двум известным величинам найдите третью.

	Основание a	Высота h	Площадь S
а)	1,6 м	0,9 м	
б)	0,8 дм		10 см^2
в)		4 дм	1 м^2
г)	3,6 м	47 дм	
д)		4,8 м	$10,8 \text{ м}^2$
е)	30 см		$0,12 \text{ м}^2$

660. Треугольник MKL задан координатами своих вершин. Вычислите его площадь тремя способами, взяв в качестве основания разные стороны треугольника, и сравните полученные результаты, учитывая, что:

- а) $M(-6; -1); K(3; 4); L(-1; -2)$;
- б) $M(-2; 2); K(4; 3); L(0; -2)$;
- в) $M(-4; -1,5); K(-1; 2,5); L(5; -2)$.

Чем объясняются возможные расхождения?

661. Измерьте стороны прямоугольного треугольника на рисунке:

- а) 365; б) 366; в) 367; г) 368; д) 369.

Проверьте правильность своих измерений, используя теорему Пифагора.

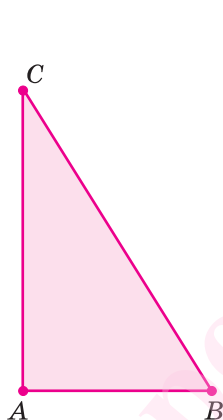


Рис. 365

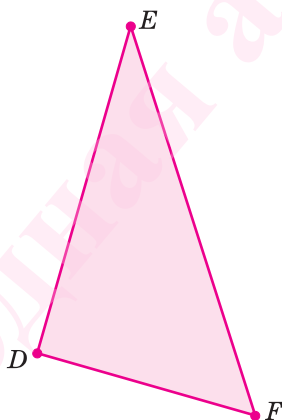


Рис. 366

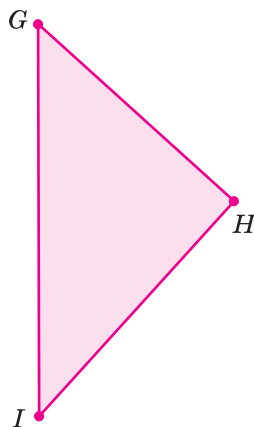


Рис. 367

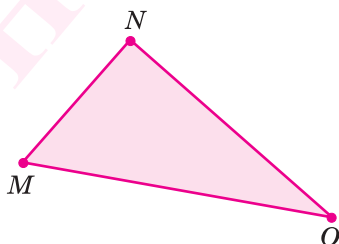


Рис. 368

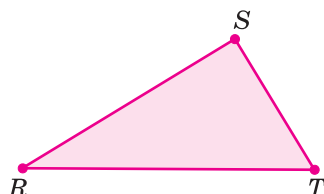


Рис. 369

662. Найдите катет прямоугольного треугольника, у которого другой катет и гипотенуза равны:

- а) 6 см и 10 см; д) 77 мм и 85 мм;
 б) 45 мм и 53 мм; е) 80 мм и 89 мм;
 в) 32 мм и 68 мм; ж) 55 мм и 73 мм;
 г) 56 мм и 65 мм; з) 72 мм и 97 мм.

663. Подбором найдите катет прямоугольного треугольника, у которого другой катет и гипотенуза равны:

- а) 12 см и 13 см; в) 35 мм и 37 мм;
 б) 8 см и 17 см; г) 11 мм и 61 мм.

664. Основания двух равновеликих треугольников (рис. 370) равны соответственно 9 см и 12 см. Высота первого треугольника равна 8 см. Найдите высоту второго треугольника.

Равновеликие фигуры — фигуры с равными площадями.

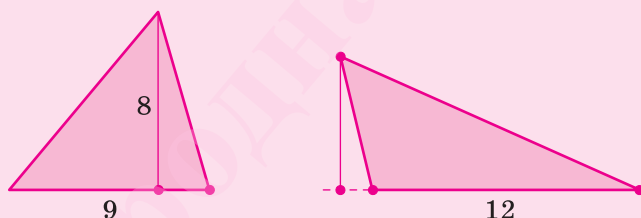


Рис. 370

665. На координатной плоскости постройте треугольник по координатам его вершин: $A(-9; -5)$, $B(16; -5)$, $C(7; 7)$. Через вершину C проведите высоту CD . Найдите координаты точки D и длину высоты CD . Вычислите длины сторон. Найдите и сравните произведения $AC \cdot BC$ и $AB \cdot CD$. Как объяснить полученный результат? Найдите отношения $\frac{AD}{AC}$, $\frac{CD}{BC}$, $\frac{AC}{AB}$

и сравните их между собой. Измерьте угол ABC и найдите остальные углы треугольников ABC , ACD и BCD .

666. Постройте произвольный треугольник ABC . Сохранив основание AC , постройте треугольник с углом при основании в 35° , равновеликий треугольнику ABC .

667. Вычислите:

- а) $23 \cdot 177 + 46 \cdot 177 + 323 \cdot 46 + 23 \cdot 323$;
- б) $132 \cdot 86 - 86 \cdot 52 - 52 \cdot 15 + 132 \cdot 15$;
- в) $23,7 \cdot 253 - 6,3 \cdot 43 + 253 \cdot 6,3 - 23,7 \cdot 43$;
- г) $5\frac{2}{3} \cdot 17\frac{3}{5} + 4\frac{1}{3} \cdot 2,4 + 5\frac{2}{3} \cdot 2\frac{2}{5} + 17,6 \cdot 4\frac{1}{3}$;
- д) $13,7 \cdot 6,4 - 11,2 \cdot 23,6 - 6,4 \cdot 11,2 + 23,6 \cdot 13,7$;
- е) $0,69 \cdot 1,37 + 2,31 \cdot 1,63 + 1,37 \cdot 0,31 + 2,31 \cdot 0,37$.

668. Одночленом стандартного вида представьте выражение:

- а) $1\frac{9}{16}a^2b^3c \cdot 0,64ab^2c^3 \cdot (-0,47a^3b^4c)$;
- б) $16x^5y^2z^6 \cdot (-13,63x^3y^4z) \cdot (-0,625x^3yz^4)$;
- в) $2401u^7v^{10} : (-49u^4v^4) : 0,49u^3v^5$;
- г) $-\frac{1}{8}m^5n^7 : 125m^2n : 15\frac{5}{8}mn^5$;
- д) $(22k^2l^3i^4)^3 \cdot (-0,1kl^4i^2)^3$;
- е) $\frac{(p^3q^2r^4)^4 \cdot (p^3q^2)^5}{(p^3q^2r)^6}$.

669. Решите уравнение:

- а) $7 - a(a + 7) = 7 - a^2$;
- б) $(c - 2)(c + 2) - c^2 = -4$;
- в) $3x(4x - 1) - 2x(6x - 9) = 12$;
- г) $(y - 5)(y + 7) = (y + 3)(y - 2) - 11$.

670. Решите уравнение:

- а) $3s - \frac{s-3}{2} = \frac{s}{6} - 5,5$; г) $\frac{5a-1}{3} \cdot \frac{3}{13} = 3$;
б) $\frac{x+5}{3} - 2 = x - \frac{4x+3}{7}$; д) $1,38 = \frac{5-2t}{4} \cdot 13,8$;
в) $\frac{4-b}{8} + b = \frac{b}{2} + 5$; е) $\frac{5+3u}{12} \cdot 1,2 = u + 6$.

671. Решите уравнение:

- а) $4x^4 - 6x^3 = 0$; в) $z^2 + 2z + 1 = 0$;
б) $6y^4 + 4y^2 = 0$; г) $12 - 3t^2 = 0$.

672. При каком значении переменной b уравнение $b x = 14$ имеет корень, равный:

- а) -7 ; б) 1 ; в) -14 ; г) 0 ; д) -21 ; е) $-2,8$?

673. Выполните умножение многочленов:

- а) $(a-x)(a^2+x^2)(a+x)$; г) $(u-v+w)(u-v-w)$;
б) $(4+a)(4-a)(a^2-9)$; д) $(-p+2q)(4q^2+4pq+p^2)$;
в) $(x+y-z)(x+y+z)$; е) $(4m^2-6mn+9n^2)(3n+2m)$.

674. Докажите тождество из книги древнегреческого математика Диофанта (III в.) (рис. 371):

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2.$$

675. Выполните действия:

- а) $(x+y)^2 + (x-y)^2$;
б) $(a+b)^3 + (a-b)^3$;
в) $(u+v)^2 - (u-v)^2$;
г) $(m+n)^3 - (m-n)^3$.



Рис. 371

676. Найдите четыре последовательных натуральных числа, зная, что:

- а) произведение двух первых из этих чисел на 42 меньше произведения двух последних;
б) произведение первого и третьего из этих чисел на 55 меньше произведения двух остальных;

в) произведение двух первых из этих чисел на 33 меньше произведения двух остальных.

677. Используя данные из таблицы, постройте столбчатую диаграмму изменения населения Хойников.

Год	1897	1939	1959	1970	1985	1995	2006
Население, тыс. чел.	2,7	3,4	6,0	9,5	16,5	12,5	13,7

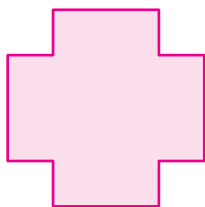


Рис. 372

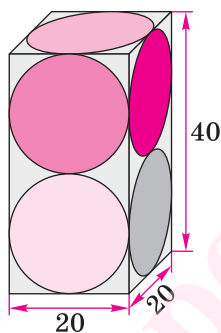


Рис. 373

678. По углам квадратного листа жести вырезали квадраты со стороной 6 см (рис. 372) и образовавшиеся края загнули. В результате получилась коробка. Найдите размеры листа и вместимость коробки, учитывая, что площадь дна коробки на 480 см^2 меньше площади листа.

Сделайте из бумаги развертку такой коробки и проверьте измерением решение задачи.

679. Два измерения прямоугольного параллелепипеда равны 20 см, а третье — 40 см (рис. 373). На его гранях-квадратах закрашены круги диаметром 20 см, а на гранях-прямоугольниках — закрашено еще по два таких же круга. Какова незакрашенная площадь поверхности параллелепипеда?

680. Есть отходы стали с содержанием никеля 5 % и 40 %. В какой пропорции нужно их взять, чтобы получить сплав с содержанием никеля 30 %?

681. Сколько воды нужно долить к 1,5 л 70-процентного раствора уксуса, чтобы получить 9-процентный раствор; 6-процентный раствор?



Рис. 374

682. Из Выгонощей в Солигорск (рис. 374) выехала машина со скоростью 60 км/ч. Через три четверти часа навстречу из Солигорска выехал велосипедист со скоростью 19 км/ч. Через какое время он встретит машину?

683. Турист вышел из одного населенного пункта и пошел в Ганцевичи (см. рис. 374). Он рассчитал, что если будет идти со скоростью 5 км/ч, то придет на условленную встречу ранее срока на 24 мин, а если будет идти со скоростью 4 км/ч, то опоздает на час. Из какого населенного пункта вышел турист?

684. Первый комбайнер убрал 120 га ржи, а второй — 96 га; первый работал на 2 дня больше второго. Найдите, сколько дней работал каждый комбайнер, если в день они убирали ржи поровну.

685. Первая и вторая машины двигались со скоростью 60 км/ч и 80 км/ч соответственно, и первая машина проехала на 40 км больше. Учитывая, что время движения первой машины относится ко времени движения второй машины как $3 : 2$, найдите время движения каждой машины.

686. Первая и вторая машины ехали соответственно 4 ч и 2 ч, и первая машина проехала на



Рис. 375

80 км больше. Найдите скорость движения первой и второй машин, учитывая, что они относятся как 3 : 4.

687. По Чаусскому району протекают притоки Прони — реки Бася и Реста — и приток Ресты — река Рудея. Длина Прони соотносится с длиной Баси как 43 : 26, а с длиной Ресты — как 43 : 25; Бася длиннее Ресты на 4 км. Найдите длины этих рек, учитывая, что Рудея короче Ресты в 2,5 раза.

688. На рисунке 375 показана группа озер на границе Россонского и Верхнедвинского районов. Объем воды в озере

Бредно составляет 30 % от объема воды в озере Изубрица и относится к объему воды в озере Белое как 27 : 205. Найдите, сколько воды в каждом из этих озер, учитывая, что в озере Изубрица воды на 2,3 млн м³ меньше по сравнению с озером Белое.

* * *

689. Проверьте, что $\frac{30^3 - 17^3}{30^3 + 47^3} = \frac{30 - 17}{30 + 47}$. Докажите, что вообще при $c = a + b$ верно равенство $\frac{a^3 - b^3}{a^3 + c^3} = \frac{a - b}{a + c}$.

690. Многоугольник разрезали на два треугольника. Сколько сторон мог иметь многоугольник?

691. Докажите, что среди любых пяти человек есть двое с одинаковым количеством знакомых среди этих пяти человек.

V

раздел

Параллельные прямые

20. Признаки параллельных прямых

А) Напомним, что две прямые на плоскости могут пересекаться, т. е. иметь одну общую точку, а могут быть параллельными, т. е. вовсе не иметь общих точек. Здесь мы установим признаки, которые позволяют утверждать, что две данные прямые параллельны.

Пересечем две прямые a и b третьей прямой x . Прямую x , чтобы отличать от прямых a и b , называют **секущей** (рис. 376). При этом возникает 8 углов (рис. 377). Четыре из них 1, 2, 7, 8, расположенные вне полосы между прямыми, называют **внешними** углами, четыре остальных 3, 4, 5, 6 — **внутренними** углами. Их определенным образом объединяют в пары и дают специальные названия.

Углы 1 и 5, 2 и 6, 3 и 7, 4 и 8 (рис. 378) называют **соответственными**, углы 3 и 5, 4 и 6 (рис. 379) — **внутренними односторонними**, а углы

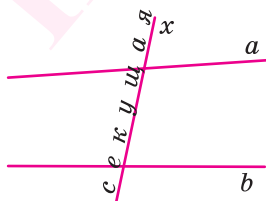


Рис. 376

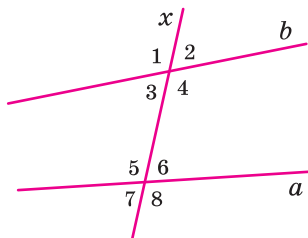


Рис. 377

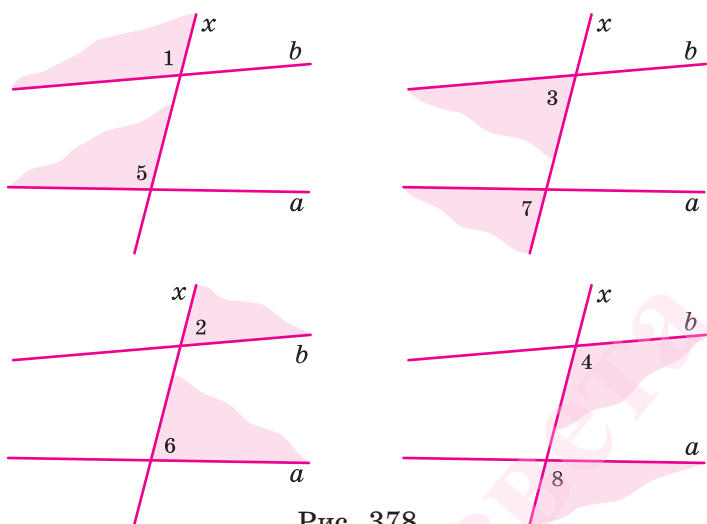


Рис. 378

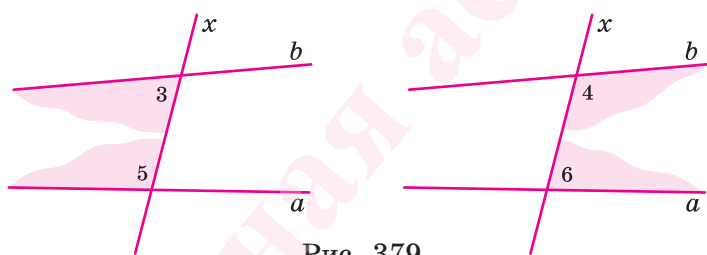


Рис. 379

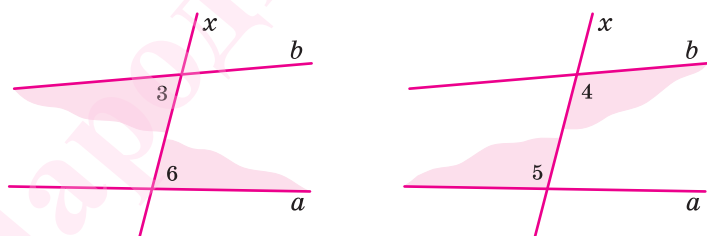


Рис. 380

3 и 6, 4 и 5 (рис. 380) — внутренними накрест лежащими.

Б) Мы умеем строить треугольник по стороне и прилежащим к ней углам. Нетрудно понять, что не всегда, если дана сторона и два прилежащих угла, можно построить треугольник. Попробуем, например,

построить треугольник со стороной 30 мм и прилежащими к ней углами в 85° и 125° . Рисунок 381 показывает, что лучи MP и NQ расходятся, поэтому пересекаться не могут.

Теперь обратим внимание на то, что углы PMN и QNM — внутренние односторонние углы при пересечении прямой MN с прямыми MP и NQ . Их сумма превышает 180° , и лучи MP и NQ не пересекаются. Сумма другой пары внутренних односторонних углов RMN и SNM меньше 180° , и лучи MR и NS пересекаются.

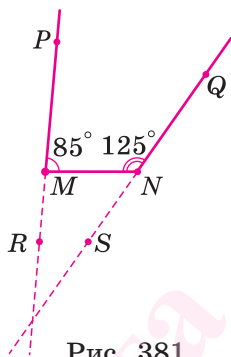


Рис. 381

Связь между суммой односторонних углов и пересекаемостью лучей была замечена давно. Древнегреческий математик Евклид (рис. 382) в книге «Начала», созданной более 2300 лет назад, этот факт сформулировал так.

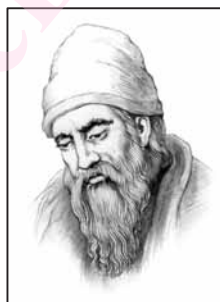


Рис. 382

Если при пересечении двух прямых третьей образовались внутренние односторонние углы, сумма которых не равна 180° , то эти прямые пересекаются с той стороны, с которой эта сумма меньше 180° .

А если с одной и с другой стороны от MN внутренние односторонние углы в сумме составляют 180° , то прямые MP и NQ не пересекаются, они параллельны (рис. 383).

Теорема 1. *Если при пересечении двух прямых третьей получились внутренние односторонние углы, вместе составляющие 180° , то такие прямые параллельны.*

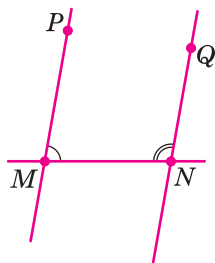


Рис. 383

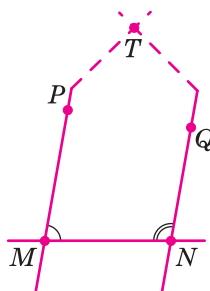


Рис. 384

Доказательство. Пусть прямые MP и NQ пересечены прямой MN , и $\angle PMN + \angle QNM = 180^\circ$ (рис. 384). Допустим, что прямые MP и NQ пересекаются в некоторой точке T . Тогда образуется треугольник MTN , у которого по условию сумма внутренних углов TMN и TNM равна 180° . Если учесть третий внутренний угол

MTN , то получится, что сумма внутренних углов треугольника MTN больше 180° . Но такого не может быть, поскольку эта сумма равна 180° . Поэтому допущение о пересекаемости прямых MP и NQ нужно отклонить и признать, что эти прямые параллельны.

В) Теорема 2. *Если при пересечении двух прямых третьей получились равные соответственные углы, то такие прямые параллельны.*

Доказательство. Пусть прямые MP и NQ пересечены прямой MN , $\angle QNM = \angle PMR$ (рис. 385). Поскольку углы PMR и PMN смежные, то $\angle PMR + \angle PMN = 180^\circ$. Учитывая равенство углов PMR и QNM , получаем: $\angle QNM + \angle PMN = 180^\circ$. Но углы QNM и PMN являются внутренними односторонними. Значит, по теореме 1 прямые MP и NQ параллельны.

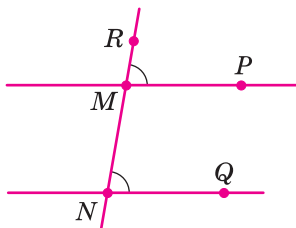


Рис. 385

Г) Теорема 3. *Если при пересечении двух прямых третьей получились равные внутренние накрест лежащие углы, то такие прямые параллельны.*

Доказательство. Пусть прямые MP и NQ пересечены прямой MN и $\angle SMN = \angle QNM$ (рис. 386). Поскольку углы PMR и SMN вертикальные, то $\angle PMR = \angle SMN$. Значит, $\angle PMR = \angle QNM$. Но углы PMR и QNM являются соответственными. Поэтому

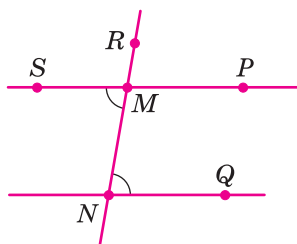


Рис. 386

по теореме 2 прямые MP и NQ параллельны.

Теоремы 1, 2, 3 выражают признаки параллельности прямых.

Признак, сформулированный в теореме 2, используют при построении параллельных прямых с помощью *малки*. Она состоит из двух планок, угол между которыми можно менять (рис. 387). При сжатии планок винтом угол между ними фиксируется. На рисунке 388 показано, как пользоваться малкой: одна планка скользит вдоль края доски, а по краю другой проводят параллельные линии. С этой целью используют и чертежный треугольник, а вместо ровного края доски, по которому скользит одна планка малки, можно приспособить линейку (рис. 389).

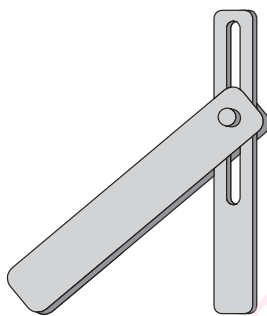


Рис. 387

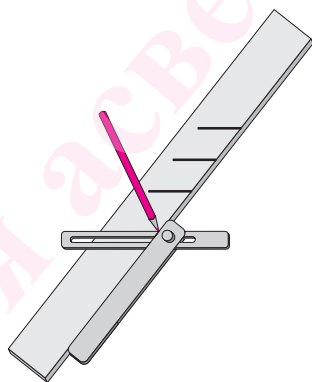


Рис. 388

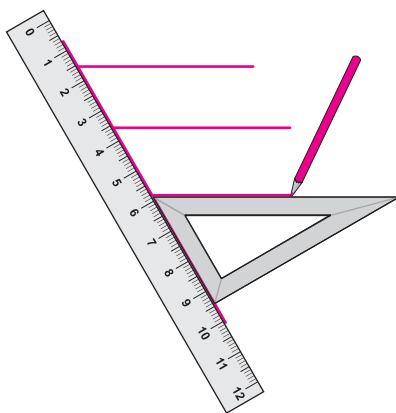


Рис. 389



1. При каком условии можно построить треугольник по данной стороне и прилежащим к ней углам?
2. Сформулируйте признак параллельности прямых по сумме внутренних односторонних углов.
3. Сформулируйте признак параллельности прямых по соответственным углам.
4. Сформулируйте признак параллельности прямых по внутренним накрест лежащим углам.
5. Как проводят параллельные прямые с помощью малки?
6. Как провести параллельные прямые с помощью чертежного треугольника и линейки?

692. На рисунке 390 прямая IF — секущая. Назовите угол:

- а) соответственный углу FBA ;
- б) соответственный углу HCB ;
- в) внутренний односторонний с углом CBE ;
- г) внутренний односторонний с углом DCF ;
- д) внутренний накрест лежащий с углом IBG ;
- е) внутренний накрест лежащий с углом EBC .

693. На рисунке 391 прямая EG — секущая. Назовите угол:

- а) соответственный углу DFB ;
- б) соответственный углу IBE ;
- в) внутренний односторонний с углом FBA ;
- г) внутренний односторонний с углом HBG ;
- д) внутренний накрест лежащий с углом HBE ;
- е) внутренний накрест лежащий с углом DFB .

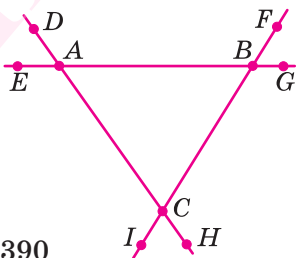


Рис. 390

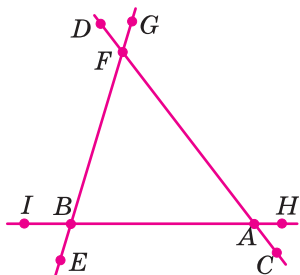


Рис. 391

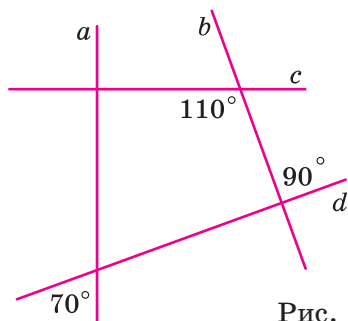


Рис. 392

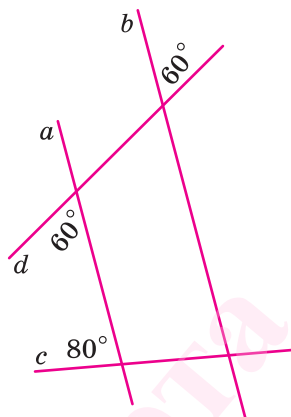


Рис. 393

694. Найдите углы между прямыми a и c , a и b , b и c , b и d , c и d , показанными на рисунке:

а) 392; б) 393.

695. Докажите, что если при пересечении двух прямых третьей:

а) внутренние накрест лежащие углы одной пары равны, то внутренние накрест лежащие углы другой пары также равны;

б) соответственные углы одной пары равны, то соответственные углы каждой пары также равны;

в) внутренние односторонние углы одной пары вместе составляют 180° , то внутренние односторонние углы другой пары вместе также составляют 180° .

696. На рисунке 394 внутренние односторонние углы 2 и 3 вместе составляют меньше 180° .

Что можно сказать о:

а) соответственных углах;

б) внутренних накрест лежащих углах?

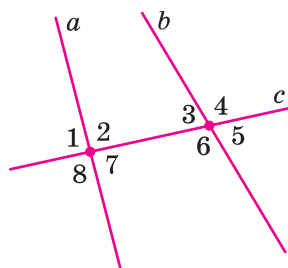


Рис. 394

697. Внутренние накрест лежащие углы, образованные при пересечении прямой c с прямыми a и b , равны. Что можно сказать о:

а) внутренних односторонних углах;

б) соответственных углах?

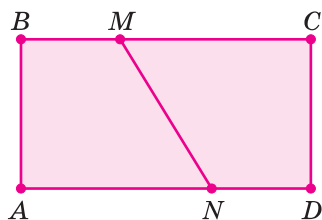


Рис. 395

698. От вершин B и D прямоугольника $ABCD$ на его сторонах отложили равные отрезки BM и DN (рис. 395). Докажите, что:

- а) $\angle BMN = \angle DNM$;
- б) $\angle CMN = \angle ANM$.

699. Прямая AB пересекает прямые PQ и RS в точках M и N (рис. 396). Когда измерили углы QMN и RNM , то оказалось, что они равны. Докажите, что полоса $QMNS$ наложится на полосу $RNMP$.

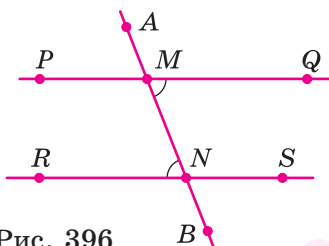


Рис. 396

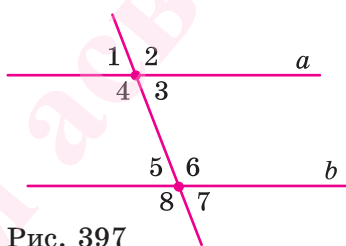


Рис. 397

700. Определите, какие углы образуются при пересечении прямых AB и BC , BC и CD , учитывая, что $\angle ABC = 70^\circ$ и $\angle BCD = 80^\circ$. Запишите пары соответственных, внутренних односторонних, внутренних накрест лежащих углов.

701. Докажите, что две прямые на плоскости, перпендикулярные третьей, параллельны между собой.

702. Учитывая обозначения на рисунке 397, скажите, будут ли прямые a и b параллельными, если:

- а) $\angle 3 = 42^\circ$ и $\angle 5 = 138^\circ$;
- б) $\angle 2 = 126^\circ$ и $\angle 6 = 126^\circ$;
- в) $\angle 2 = 143^\circ$ и $\angle 5 = 39^\circ$;
- г) $\angle 1 = 58^\circ$ и $\angle 8 = 58^\circ$.

703. Способом, показанным на рисунке 389, проведите три прямые, параллельные друг другу.

704. Вырежьте из бумаги треугольник PQR (рис. 398). Загните угол R так, чтобы точка R со-

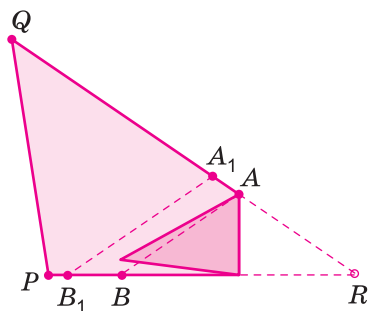


Рис. 398

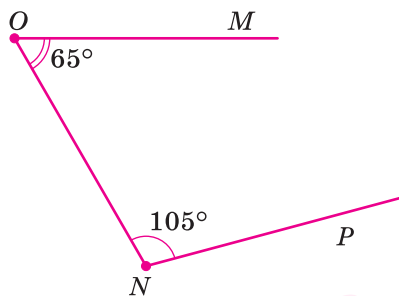


Рис. 399

вместилась с точкой на стороне PR , и проведите прямую AB . Сделайте это еще один раз, и получите прямую A_1B_1 . Докажите, что прямые AB и A_1B_1 параллельны.

705. Один из внутренних односторонних углов, возникших при пересечении прямых UT и SD третьей, равен 30° , другой — в пять раз больше его. Докажите, что прямые UT и SD параллельны.

706. Лучи OM и NP образуют с отрезком ON углы в 65° и 105° соответственно (рис. 399). Найдите угол между прямыми OM и NP .

707. Объясните, как измерить угол между двумя прямыми, если точка их пересечения находится за пределами листа, на котором они начерчены. Сколько способов вы можете предложить?

708. Начертите прямую GH и отметьте точку P вне ее. С помощью чертежного треугольника постройте прямую, которая проходит через точку P параллельно прямой GH .

709. Используя линейку и транспортир, через данную точку проведите прямую, параллельную данной прямой.

710. Один из внутренних односторонних углов, возникших при пересечении прямых AC и BD третьей, равен 56° , другой — на 68° больше его. Докажите, что прямые AC и BD параллельны.

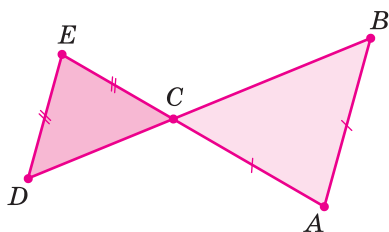


Рис. 400

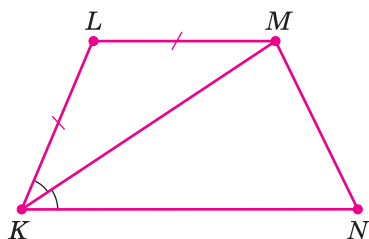


Рис. 401

711. Докажите, что центрально-симметричные отрезки параллельны.

712. У равнобедренных треугольников ABC и CDE общая вершина C , а основания CB и CD лежат на одной прямой (рис. 400). Докажите, что прямые AB и DE параллельны.

713. Отрезки PQ и RS пересекаются в их общей середине. Докажите, что противоположные стороны четырехугольника $PRQS$ параллельны.

714. Стороны KL и LM четырехугольника $KLMN$ равны, а диагональ KM является биссектрисой угла LKN (рис. 401). Докажите, что у четырехугольника $KLMN$ есть пара параллельных сторон.

715. На боковой стороне AC равнобедренного треугольника ABC с основанием AB и углом при основании, равном 68° , выбрали некоторую точку D и соединили ее с такой точкой E стороны BC , что $DA = DE$ (рис. 402). Оказалось, что угол EAB равен 34° . Докажите, что:

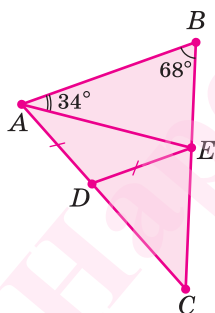


Рис. 402

а) $DE \parallel AB$;

б) треугольник CDE равнобедренный.

716. В треугольнике PRQ построена биссектриса QS , а через точку S проведена прямая, пересекающая сторону QR в такой точке T , что $TQ = TS$. Докажите, что прямые PQ и ST параллельны.

717. Вычислите:

- а) $142^2 + 142 \cdot 58$; г) $0,7^3 - 0,49 \cdot 2,7$;
б) $0,8^3 + 0,8 \cdot 9,36$; д) $0,12^2 + 0,78 \cdot 1,2$;
в) $376^2 - 76 \cdot 376$; е) $0,6^3 + 3,6 \cdot 0,05$.

718. Вынесите общий множитель за скобки:

- а) $28x^3y^4 - 21x^4y^3$;
б) $11a^4b^2 + 33a^3b$;
в) $8p^2q^2 - 36p^2q^3 + 12p^3q^2$;
г) $16i^2j^4 + 24i^4j^2 - 32i^3j^3$;
д) $x^2(x - 5) - x(x - 5)^2$;
е) $u(u + 3)^3 + (3 + u)^2u^3$;
ж) $t^3(t - 7)^2 + t^2(7 - t)^2$;
з) $3m(m - n)^2 - 12m^2(m - n)$.

719. Решите уравнение:

- а) $0,15(f - 6) = 7,5 - 0,3(f - 2)$;
б) $3,6(x - 4) - 0,8 = 4(0,3x - 6)$;
в) $(0,8g - 3,1) - (0,2 - g) = 0,4(4g - 2) + 0,3$;
г) $-7(2 - 0,9s) + 4,7 = 0,3(2s + 7)$.

720. Разложите на множители выражение:

- а) $5(a + b)(a - b) - (a + b)^2$;
б) $3(x - y)^2 - (x + y)(y - x)$;
в) $(m + n)^3 - m(m + n)^2$;
г) $i(i - k)^2 - (k - i)^3$.

721. Остер, Волчес, Уза — притоки Сожа. От длины Волчеса длина Узы составляет 95 %, а длина Остера — 342,5 %. Найдите длины этих рек, учитывая, что Остер длиннее Узы на 198 км.

722. В первой емкости 2 кг 10-процентного раствора соли, во второй — 3 кг 15-процентного. Из первой емкости испарили некоторое количество воды, и полученный раствор влили во вторую емкость. Может ли полученный раствор быть 16-процентным?

723. В первой емкости 5 кг 4-процентного раствора соли, во второй — 1 кг 10-процентного. Из второй емкости испарили некоторое количество воды, и полученный раствор влили в первую емкость. Определите с точностью до 0,1 %, какой концентрации может быть полученный раствор.

724. Сплавляли два куса серебра 600-й и 840-й пробы и получили сплав 790-й пробы. Определите массу каждого куса, учитывая, что масса первого была на 140 г меньше массы второго.

725. Из двух сплавов с 60-процентным и 80-процентным содержанием меди нужно изготовить 4 кг сплава с 75-процентным содержанием меди. Сколько нужно взять для этого каждого сплава?

726. Количество приватизированных квартир в доме заключено в пределах от 96,5 % до 97,2 % общего количества квартир. Какое наименьшее количество квартир может быть в таком доме?

727. После проверки оказалось, что на диске количество файлов с вирусами находится в пределах от 3,89 % до 4,44 % всех файлов. Какое наименьшее количество файлов могло быть на этом диске?

728. Чтобы засеять 10 га рожью и 5 га озимой пшеницей, понадобилось 3 т 70 кг семян. Найдите норму высева тех и других семян на гектар, учитывая, что озимой пшеницы на гектар высевали на 40 кг меньше, чем ржи.

729. Имеется два прямоугольных параллелепипеда с высотами 6 м и 9 м и общей площадью их оснований, равной 45 м². Найдите объемы первого и второго параллелепипедов, учитывая, что они относятся как 8 : 15.

730. На отрезке AB длиной 31 м выбрали точку C и на отрезках-частях AC и BC как на высотах построили прямоугольные параллелепипеды с пло-

падаями оснований 40 м^2 и 24 м^2 . Найдите объемы первого и второго параллелепипедов, учитывая, что они относятся как $16 : 9$.

* * *

731. В примере $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9$, определенным образом расставив вместо звездочек знаки «+» и «-», Янка получил 21, а Антон — 20. Можно ли утверждать, что:

- а) хотя один из мальчиков ошибся;
- б) Янка не ошибся;
- в) ошибся Антон;
- г) ошибся Янка?

732. Найдите наименьшее число, которое начинается цифрами 2009 и делится на все числа от 1 до 9.

733. Есть шесть грузиков массами 1 г, 2 г, 3 г, 4 г, 5 г и 6 г с надписями «1 г», «2 г», «3 г», «4 г», «5 г» и «6 г», хотя надписи могут быть и перепутаны. Как за два взвешивания на рычажных весах выяснить, есть ли грузики, надписи на которых не соответствуют их массе?

21. Свойства параллельных прямых

А) Известный вам факт о сумме углов треугольника тесно связан с параллельностью прямых.

Теорема 4. *Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.*

▲ **Доказательство.** Пусть известно, что сумма углов треугольника равна 180° . Пусть l — данная прямая и A — данная точка (рис. 403). Через точку A проведем прямую, перпендикулярную прямой l , пусть она пересекает прямую l в точке B_0 . Построим прямую AC , перпендикулярную прямой AB_0 .

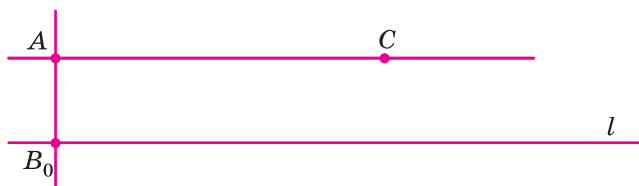


Рис. 403

Поскольку внутренние односторонние углы, образованные при пересечении прямых AC и l прямой AB_0 , вместе составляют 180° , то по теореме 1 прямая AC параллельна прямой l . Значит, прямая AC является прямой, проходящей через точку A и параллельной прямой l .

Остается доказать, что любая другая прямая, проходящая через точку A , пересекает прямую l . Пусть AK — еще одна прямая, проходящая через точку A (рис. 404), а угол между прямыми AC и AK равен α . На прямой l от точки B_0 отложим отрезок B_0B_1 , равный отрезку AB_0 . Поскольку треугольник AB_0B_1 является равнобедренным, то его углы B_0AB_1 и B_0B_1A равны и равны $\frac{90^\circ}{2}$. Поскольку угол B_0AC прямой, то $\angle CAB_1 = \frac{90^\circ}{2}$.

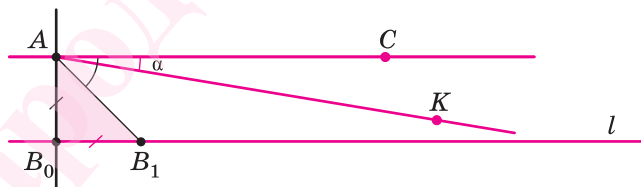


Рис. 404

На луче B_0B_1 отложим отрезок B_1B_2 , равный отрезку B_1A (рис. 405). Получили равнобедренный треугольник AB_1B_2 . Его внешний угол AB_1B_0 равен сумме углов B_1AB_2 и B_1B_2A . А поскольку эти углы равны, то угол B_1B_2A равен половине угла AB_1B_0 , т. е. $\angle AB_2B_1 = \frac{90^\circ}{4} = \frac{90^\circ}{2^2}$. Теперь обратим внимание на то, что угол B_2AB_0 углами AB_2B_0 и CAB_2 допол-

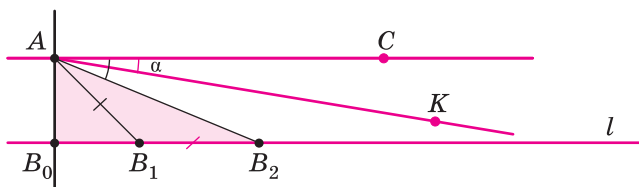


Рис. 405

няется до 90° . Значит, $\angle CAB_2 = \angle AB_2B_0$. Поскольку $\angle AB_2B_0 = \frac{90^\circ}{2^2}$, то $\angle CAB_2 = \frac{90^\circ}{2^2}$.

Отложив на луче B_0B_2 отрезок B_2B_3 , равный отрезку B_2A (рис. 406), также убедимся, что $\angle CAB_3 = \frac{90^\circ}{2^3}$.

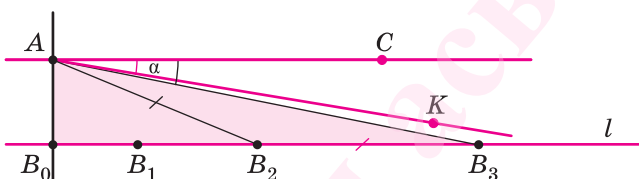


Рис. 406

После n шагов этого процесса получаем угол $\angle CAB_n$, равный $\frac{90^\circ}{2^n}$. Значение выражения $\frac{90^\circ}{2^n}$ с переходом к следующему значению переменной n уменьшается в 2 раза и может стать меньше любого выбранного заранее значения. Например, при $n = 10$ угол $\angle CAB_n$ равен $5'16,4''$. Значит, при некотором значении n угол $\angle CAB_n$ станет меньше α , и поэтому луч AB_n пройдет выше луча AK (рис. 407). Это означает, что на некотором шаге n будет получен такой треугольник $B_{n-1}AB_n$, что луч AK будет заключен

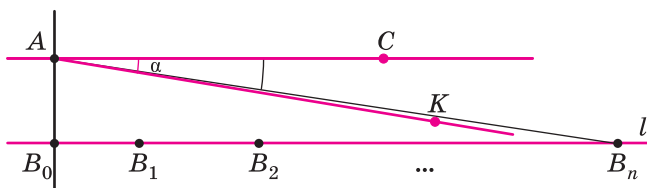


Рис. 407

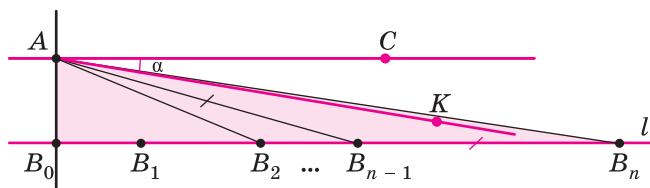


Рис. 408

в угле $B_{n-1}AB_n$ (рис. 408). Получается, что луч AK пересечет сторону $B_{n-1}B_n$ треугольника $B_{n-1}AB_n$. Значит, произвольно выбранная прямая AK , отличная от прямой AC , пересекает прямую l . ▲

Следствие 1. Если прямая s пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.

Действительно, пусть $a \parallel b$ и прямые s и a пересекаются в точке M (рис. 409). Если допустить, что прямые s и b не пересекаются, то получится, что через точку M проходят две прямые s и a , не пересекающие b . Но это противоречит теореме 4.

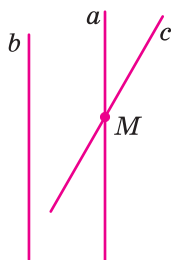


Рис. 409

Аналогичным рассуждением обосновывается и следующее следствие.

Следствие 2. Две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой.

Б) Теорема 5. Если две параллельные прямые пересечены третьей, то:

а) сумма внутренних односторонних углов равна 180° ;

б) соответственные углы равны;

в) внутренние накрест лежащие углы равны.

Поскольку утверждения а), б), в) или все одновременно истинны, или все одновременно ложны, то достаточно доказать одно из них.

Докажем утверждение б). Пусть параллельные прямые a и b пересекла прямая MN и при этом получились

соответствующие углы 1 и 2 (рис. 410). Докажем, что они равны. Допустим, что это не так. Через точку M пересечения прямой MN с прямой b проведем прямую MQ так, чтобы угол PMQ был равен углу 2. Поскольку углы PMQ и 2 соответственные, то по

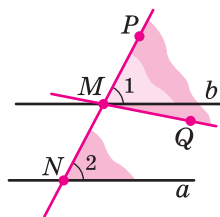


Рис. 410

теореме 2 прямая MQ параллельна прямой a . Но через точку M проходит и прямая b , которая по условию также параллельна прямой a . Получили, что через точку M проходят две различные прямые MQ и b , которые параллельны прямой a . А это противоречит теореме 4. Поэтому сделанное допущение нужно отклонить и согласиться с тем, что соответственные углы, образованные при пересечении прямой MN с параллельными прямыми a и b , равны.

В) Утверждения о равенстве суммы углов треугольника 180° и о единственности прямой, которая проходит через данную точку и параллельна данной прямой, равносильны в том смысле, что, приняв одно из них, можно доказать другое как теорему. Одна из них это теорема 4.

▲ Докажем теперь обратное утверждение.

Пусть известно, что через любую точку плоскости можно провести прямую, параллельную данной прямой, и только одну. Пусть AB — данная прямая и P — данная точка (рис. 411). Пусть через точку P проведены прямые CD и EF , из которых первая параллельна прямой AB , а вторая пересекает эту прямую в точке Q (рис. 412).

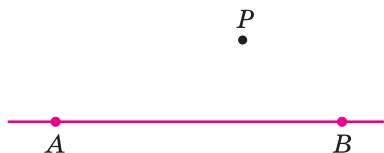


Рис. 411

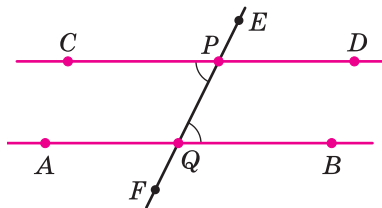


Рис. 412

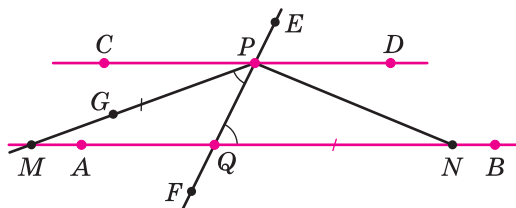


Рис. 413

Докажем сначала, что накрест лежащие углы BQE и CPF равны. Построим угол FPG , равный углу BQE . Прямая PG не пересекает прямую AB . Допустим, что это не так, т. е. прямая PG пересекает прямую AB в некоторой точке M (рис. 413). От точки Q на луче QB отложим отрезок QN , равный отрезку PM , и точку N соединим с точкой P . Получили треугольники PMQ и QNP , у которых сторона PQ общая, а углы QPM и PQN , как и стороны PM и QN , равны по построению. Поэтому треугольники PMQ и QNP равны. Значит, углы PQM и QPN этих треугольников также равны. Но углы PQN и PQM вместе составляют 180° , поэтому и углы QPN и QPM также вместе составляют 180° . А это означает, что точки M , P и N лежат на одной прямой. В результате мы получили, что через точки M и N проходят две различные прямые PG и AB , что противоречит основному свойству прямой. Это вынуждает отклонить допущение о том, что прямая PG пересекает прямую AB , и тем самым согласиться с тем, что прямая PG параллельна прямой AB . Теперь, используя условие о единственности прямой, параллельной данной, утверждаем, что прямая PG совпадает с прямой CD , а угол FPG совпадает с

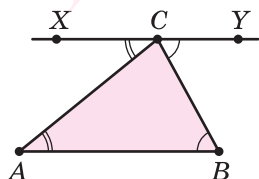


Рис. 414

углом FPC . Значит, накрест лежащие углы BQE и FPC равны.

Докажем теперь, что сумма углов в любом треугольнике равна 180° . Пусть ABC — произвольный треугольник (рис. 414). Через

точку C проведем прямую, параллельную прямой AB . Пусть это прямая XU . Тогда углы ABC и BCU равны, так как это накрест лежащие углы при параллельных прямых AB и XU , пересеченных прямой BC . Углы BAC и ACX также равны, так как это накрест лежащие углы при параллельных прямых AB и XU , пересеченных прямой AC . Значит,

$$\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle BCU + \angle ACX + \angle ACB.$$

Учитывая, что углы BCU , ACX и ACB вместе составляют развернутый угол, получаем:

$$\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180^\circ. \blacktriangle$$

- ?**
1. Сформулируйте свойство внутренних углов треугольника.
 2. Сформулируйте свойства параллельных прямых.
 3. Сформулируйте утверждение о существовании и единственности прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой.
 4. Как связаны между собой свойство внутренних углов треугольника и утверждение о существовании и единственности прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой?

734. Докажите, что если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то внутренние односторонние углы вместе составляют 180° .

735. На рисунке 415 стороны треугольника $A_1B_1C_1$ параллельны сторонам треугольника ABC . Что вы можете утверждать о соответствующих углах этих треугольников?

736. Докажите, что если первая прямая параллельна второй прямой, которая параллельна третьей прямой, то первая прямая параллельна третьей прямой.

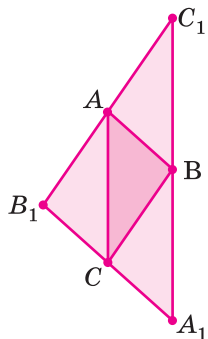


Рис. 415

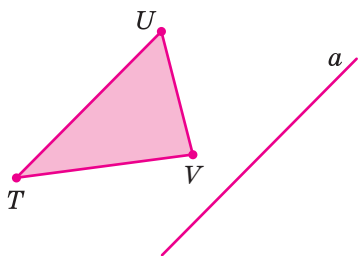


Рис. 416

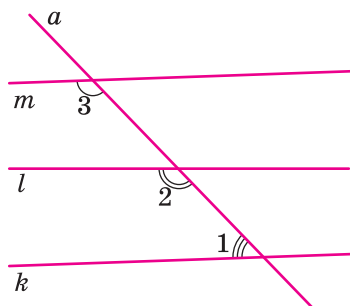


Рис. 417

737. Прямые a и b перпендикулярны прямой k . Прямая p пересекает прямую a . Обязательно ли прямая p пересекает: прямую b ; прямую k ; прямые b и k ?

738. Прямая a параллельна стороне TU треугольника TUV (рис. 416). Докажите, что каждая из прямых VU и VT пересекает прямую a .

739. На рисунке 417 прямая a пересекает прямые k , l и m , при этом углы 1, 2 и 3 соответственно равны 48° , 134° и 132° . Какие прямые на этом рисунке параллельны?

740. Найдите все углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых третьей, если один из углов:

- а) равен 140° ;
- б) на 75° меньше другого;
- в) в 3,5 раза больше другого.

741. Параллельные прямые CD и EF пересечены третьей прямой AB . Найдите величины образованных при пересечении углов, учитывая, что один из внутренних односторонних углов:

- а) на 126° больше другого;
- б) на 16° меньше другого;
- в) в четыре раза меньше другого;
- г) состоит из 7 долей, а другой — из 8 таких долей.

742. Через середину O отрезка MN , концы которого лежат на параллельных прямых a и b , проведе-

на прямая, которая пересекает прямые a и b в точках P и Q . Докажите, что отрезки OP и OQ равны.

743. Найдите угол между прямыми OM и NP , учитывая, что с отрезком ON лучи OM и NP образуют соответственно углы в:

- а) 65° и 105° ; б) 65° и 10° ; в) 65° и 115° .

744. Разность внутренних односторонних углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых третьей, равна 40° . Найдите все образовавшиеся при этом углы.

745. Накрест лежащие углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых третьей, вместе составляют 80° . Найдите все образовавшиеся при этом углы.

746. Прямые a и b , а также c и d параллельны (рис. 418). При их пересечении образовался четырехугольник $PQRS$. Найдите его углы, учитывая, что прямые b и c пересекаются под углом 72° .

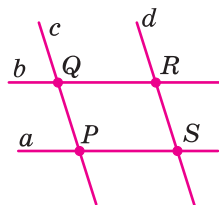


Рис. 418

747. Два груза подвешены на бечевке, перекинутой через блоки K и L (рис. 419). Третий груз P_3 подвешен на этой же бечевке в точке M и уравнивает грузы P_1 и P_2 . Докажите, что угол KML равен сумме углов 1 и 2 между бечевками.

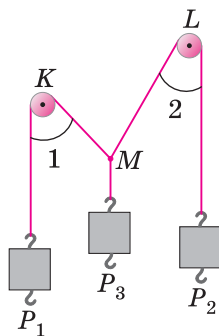


Рис. 419

748. Параллельные прямые пересечены третьей прямой. Докажите, что:

- а) биссектрисы внутренних односторонних углов перпендикулярны;
б) биссектрисы внутренних накрест лежащих углов параллельны.

749. Докажите, что углы с соответственно параллельными сторонами равны или в сумме составляют 180° .

750. Найдите внутренние углы равнобедренного треугольника, учитывая, что один из его внешних углов равен:

- а) 100° ; б) 120° ; в) 30° .

751. Докажите, что хотя бы два угла треугольника острые.

752. Докажите, что углы при основании равнобедренного треугольника острые.

753. Упростите выражение и найдите его значение при данных значениях переменной:

- а) $(4a - 1)(4a + 1) - (8a - 5)(2a + 1)$ при $a = -2,5$; $-2\frac{1}{3}$; 0 ; 2 ; $2\frac{1}{3}$; $2,5$;

- б) $(7 + 2x)^2 - 2x(2x + 15)$ при $x = -25$; -24 ; 0 ; 24 ; 25 .

754. Решите уравнение:

а) $\frac{5a-4}{3} - \frac{2a-1}{5} = -1$;

е) $\frac{3d-1}{6} - \frac{d-1}{3} = -7$;

б) $\frac{7-x}{3} + \frac{3x-2}{2} = 3\frac{2}{3}$;

ж) $\frac{6-7c}{9} = \frac{3c}{8}$;

в) $\frac{4b-7}{8} - \frac{b-6}{12} = \frac{7}{8}$;

з) $\frac{k}{6} = \frac{5-7k}{8}$;

г) $\frac{5y-11}{20} + \frac{11-5y}{15} = \frac{7}{20}$;

и) $\frac{t}{11} = \frac{t-5}{6}$;

д) $\frac{3z-5}{5} - \frac{z+2}{3} = 2$;

к) $\frac{l-1}{37} = \frac{l+2}{45}$.

755. Разложите на множители выражение:

а) $a(a - x) + 7(x - a)$;

б) $b(m - n) - 11(n - m)$;

в) $(i - j)^2 - 4(i - j)$;

д) $y^3 + y^2 - 5y - 5$;

г) $2z(p + q) - (p + q)$;

е) $3a^4 - 12a^8 + 3a^2 + 6a^6$.

756. Упростите выражение:

а) $7p^{-3}q \cdot 5p^{-2}q^{-2}r$;

б) $-3a^{-3}b^{-3} : (6a^5b^{-2}c)$;

в) $2^{-2}e^{-m}f^n g^{-l} \cdot 2^{-4}e^{-m}f^{-n}g^l$;

г) $-6b^{-t}c^2d^u : (-3b^{-v}c^{-4}d^{-l-1}e^{-v})$;

д) $(m^{-5} - m^4 + m^{-1}) \cdot m^4$;

е) $(n^{-9} + n^6 - n^{-4}) : (-n^{-5})$.

757. Зависимость между величинами t и x задана формулой $t = 2x + 3$. Вычислите значения величины t при значениях x , указанных в таблице.

x	-3	0	1	1,5	3
t					

По парам чисел, записанным в таблице, постройте соответствующие точки на координатной плоскости. Соедините эти точки плавной линией. Какой линией является график зависимости $t = 2x + 3$?

758. Путь между двумя станциями пассажирский поезд проходит со скоростью, на 20 % меньшей скорости скорого поезда. На сколько процентов больше времени затрачивает на этот путь пассажирский поезд по сравнению со скорым?

759. Первый рабочий может выполнить задание за 8 ч, второй — за 6 ч. Вместе они работали 2 ч, а заканчивал задание только второй рабочий. Сколько времени пошло на выполнение задания?

760. Пассажир половину пути из A в B проехал на автобусе, а другую половину — на легковой машине. Если бы он ехал из A в B только автобусом, то затратил бы времени в полтора раза больше. Во сколько раз скорость машины больше скорости автобуса?

761. Пассажир ехал из A в B некоторое время на автобусе и столько же времени на легковой машине. Если бы он ехал из A в B только на автобусе, то затратил бы времени в полтора раза больше. Во сколько раз скорость машины больше скорости автобуса?

762. Александр Скиба обычно выходит из дома в 7 ч 30 мин, садится в подъехавшую машину и едет на работу. Однажды он вышел в 6 ч 30 мин и пошел навстречу машине, которая встретила его и привезла на работу на 10 мин раньше обычного. Во сколько раз скорость машины больше скорости Александра Скибы?

763. Александр Скиба обычно выходит из дома в 7 ч 30 мин, садится в подъехавшую машину и едет на работу. Однажды он вышел в 6 ч 30 мин и пошел не навстречу машине, а в противоположном направлении. Машина догнала его и привезла на работу на 10 мин позже обычного. Во сколько раз скорость машины больше скорости Александра Скибы?

764. Футбольная команда из 12 сыгранных матчей выиграла 8, а остальные матчи сыграла вничью, набрав при этом 28 очков. Найдите, во сколько очков оценивалась победа, если количество очков, набранных за ничью, в 3 раза меньше.

765. Фирма закупила конверты с марками в пачках по 20 конвертов и без марок в пачках по 36 конвертов, причем пачек конвертов с марками было закуплено на 4 больше, чем без марок. Учитывая, что количества конвертов с марками и конвертов без марок относятся как 2 : 3, найдите эти количества.

766. Фирма закупила 12 пачек конвертов с марками и 18 пачек конвертов без марок, причем в пачке конвертов с марками было на 10 конвертов боль-

ше, чем в пачке конвертов без марок. Учитывая, что количества конвертов с марками и конвертов без марок относятся как $8 : 9$, найдите эти количества.

* * *

767. Докажите, что если к целому числу k прибавить квадрат половины предшествующего ему числа, то получится квадрат рационального числа.

768. Нужно посадить 9 яблонь в 10 рядов, по 3 яблони в каждом. Как это сделать?

769. Можно ли записать 6 таких различных чисел, что каких бы два из них a и b ($a < b$) мы ни взяли, можно было бы подобрать из остальных такое число x , что $a < -x < b$?

22. Расстояния

А) Пусть A и B — две данные точки (рис. 420). Из точки A в точку B можно попасть различными путями (рис. 421). Кратчайшим из них является путь 2 по отрезку AB . Длину отрезка AB называют **расстоянием между точками A и B** .

Пусть l — данная прямая, а E — данная точка (рис. 422). Из всех расстояний от точки E до точек прямой l (рис. 423)

Рис. 420

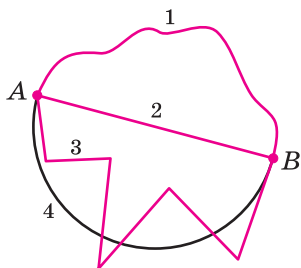


Рис. 421

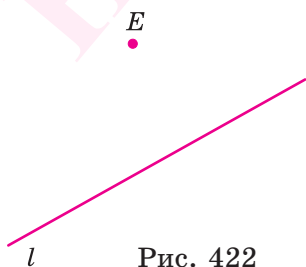


Рис. 422

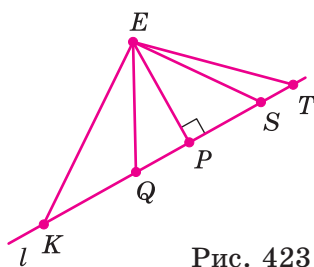


Рис. 423

наименьшим является расстояние до точки P — основания перпендикуляра EP . Длину перпендикуляра, проведенного из точки на прямую, называют расстоянием от точки до прямой.

Теорема 6. *Любые две точки одной из параллельных прямых находятся на одинаковых расстояниях от другой прямой.*

Доказательство. Пусть a и b — параллельные прямые, а P и Q — две произвольные точки прямой a (рис. 424). Расстояниями от точек P и Q до прямой b являются длины перпендикуляров PP_1 и QQ_1 соответственно. Докажем, что эти длины равны.

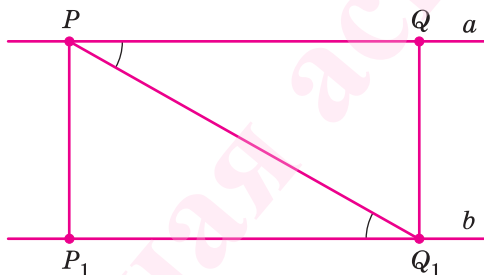


Рис. 424

Поскольку отрезок Q_1Q перпендикулярен прямой a , то треугольник Q_1QP прямоугольный. У прямоугольных треугольников PP_1Q_1 и Q_1QP общая гипотенуза, а острые углы Q_1QP и P_1Q_1P равны, поскольку это накрест лежащие углы при параллельных прямых a и b и секущей PQ_1 . Значит, эти треугольники равны. Поэтому $PP_1 = QQ_1$.

Б) Из теоремы 6 следует, что если точка двигается по одной из параллельных прямых, то расстояние от нее до другой прямой не изменяется.

Расстоянием между параллельными прямыми называется расстояние от какой-либо точки одной прямой до другой прямой.

Расстояние между параллельными прямыми является наименьшим из расстояний от точек одной прямой до точек другой прямой.



1. Что называют расстоянием между точками?
2. Что называют расстоянием от точки до прямой?
3. Какое свойство имеют точки прямой, параллельной данной?
4. Что называют расстоянием между параллельными прямыми?

770. Из точки A к прямой k проведены перпендикуляр AO и наклонная AP . Сумма их длин равна 18 см, а разность — 2 см. Найдите перпендикуляр, наклонную и расстояние между их основаниями O и P .

771. Медиана равнобедренного треугольника, проведенная из угла в 120° , равна 5 м. Найдите боковую сторону треугольника.

772. Сумма катета AC и гипотенузы AB треугольника ABC равна 18 дм, а их разность — 8 дм. Найдите расстояния от вершин A , B , C до прямых, проходящих через противоположные стороны треугольника.

773. Один из катетов прямоугольного треугольника относится к гипотенузе как $4 : 5$, а вместе они составляют 45 см. Найдите расстояния от вершин треугольника до прямых, которым принадлежат противоположные стороны.

774. Докажите, что в равнобедренном треугольнике середина основания находится на одинаковых расстояниях от боковых сторон.

775. Точка A основания KM равнобедренного треугольника KLM находится на одинаковых расстояниях от боковых сторон KL и ML . Докажите, что отрезок LA является высотой треугольника.

776. В круге с диаметром 40 мм проведены два радиуса OK и OL , угол между которыми равен 120° . Найдите расстояние от центра O до хорды KL .

777. Отрезок LL_1 — биссектриса равностороннего треугольника LMN . Учтывая, что расстояние от точки L_1 до прямой LN равно 7 дм, найдите расстояние от точки:

- а) L до стороны MN ; б) N до стороны LM .

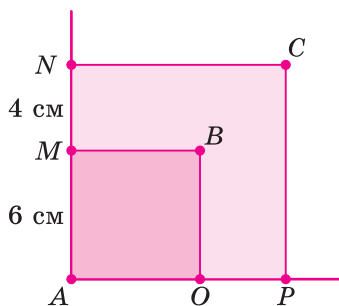


Рис. 425

778. Внутри угла A величиной 90° выбраны точки B и C , равноудаленные от сторон угла: $BM = BO$ и $CN = CP$ (рис. 425). Найдите площадь шестиугольника $MNCPOB$, учитывая, что $AM = 6$ см, а $MN = 4$ см.

779. Расстояние между параллельными прямыми k и l равно 4 см, а между параллельными прямыми l и m — 3 см. Найдите расстояние между прямыми k и m .

780. Прямая l пересекает параллельные прямые a и b в точках M и N . Найдите расстояние между прямыми a и b , учитывая, что $MN = 8$ см и угол между прямыми l и a равен 30° .

781. Найдите кратчайший путь по поверхности треугольной пирамиды между серединами ее противоположных ребер (рис. 426), учитывая, что каждое ребро пирамиды равно 6 см.

782. Найдите кратчайший путь по поверхности куба между точками A и M (рис. 427),

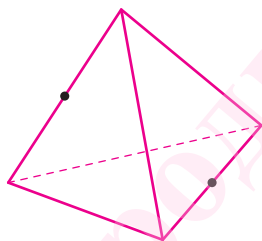


Рис. 426

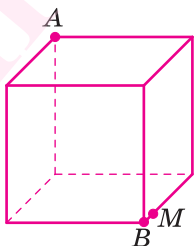


Рис. 427

учитывая, что ребро куба равно 8 см, а расстояние между точками M и B — 1 см.

783. Цилиндр образован вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон. Найдите кратчайший путь по поверхности цилиндра между противоположными точками его осевого сечения (рис. 428), учитывая, что высота цилиндра равна 12 см, а окружность в основании цилиндра имеет длину 10 см. Сколько есть этих кратчайших путей?

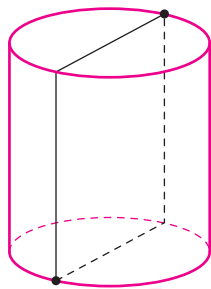


Рис. 428

784. Конус получен вращением вокруг катета прямоугольного треугольника SMQ с гипотенузой 8 см и углом при вершине в 30° (рис. 429). Найдите кратчайший путь по поверхности конуса между точками M и N осевого сечения, учитывая, что расстояние между точками N и S равно 6 см.

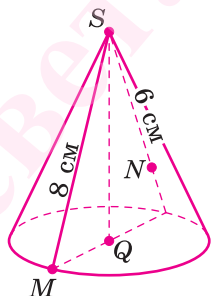


Рис. 429

785. Найдите число, учитывая, что 36 есть его:

- а) 10 %; в) 25 %; д) 15 %;
б) 50 %; г) 5 %; е) 45 %.

786. Запишите произведением степеней значение выражения:

- а) $\frac{8^4}{4^4}$; г) $\frac{(-5)^5}{15^5}$; ж) $\frac{16}{10^4}$; к) $\frac{2197}{26^3}$;
б) $\frac{51^4}{17^4}$; д) $\frac{(-24)^7}{8^7}$; з) $\frac{27}{6^3}$; л) $\frac{1331}{22^2}$;
в) $\frac{7^7}{14^7}$; е) $\frac{(-5,2)^5}{(-1,3)^5}$; и) $\frac{125}{15^3}$; м) $\frac{23^3}{28561}$.

787. Дробью запишите выражение:

а) $(a^{-8} + a^7 - a^{-3}) : (-a^{-7})$;

б) $(b^{-12} - b^{-10} - b^{-9}) : (b^{-12})$;

в) $(m^{-4} - m^{-3}n + m^{-2}n^2 - m^{-1}n^3 + n^4) \cdot m^4n^{-4}$;

г) $(r^{-10} + r^{-8}s^4 + r^{-6}s^6 + r^{-4}s^8) : (-r^{-6}s^8)$.

788. Сумма четырех чисел равна 128. Первое число относится ко второму как 5 : 6, второе к третьему — как 2 : 3, а третье к четвертому — как 3 : 4. Найдите эти числа.

789. Найдите длины сторон треугольника, учитывая, что его периметр равен 95 см, одна сторона при делении на наименьшую сторону дает в частном 2 и в остатке 7 см, а другая — в частном 3 и в остатке 4 см.

790. (Задача из учебника аль-Хорезми.) Если из числа вычесть его треть и его четверть, то получится 8. Найдите число.

791. (Задача из учебника А. Ф. Малинина и К. П. Буренина.) Купец рассчитал, что если он будет продавать сукно по $3\frac{3}{4}$ р. за аршин, то получит 18 р. 50 к. убытка, а если по $4\frac{1}{2}$ р. за аршин, то будет иметь прибыли 37 р. Сколько аршин сукна у него было?

792. В 8 ч вечера были зажжены две свечи одинаковой длины, но разного диаметра. Первая сгорит за 5 ч, а вторая — за 4 ч. Когда свечи погасили, то оказалось, что первая свеча в 4 раза длиннее второй. Когда были погашены свечи?

793. За 1 кг одного продукта и 10 кг другого уплатили 200 тыс. р. Если при сезонном изменении цен первый продукт подорожает на 15 %, а второй подешевеет на 25 %, то за такую же покупку нужно

будет уплатить 182 тыс. р. Сколько стоит 1 кг каждого продукта?

794. За 6 тетрадей уплатили на 12 500 р. больше, чем за 2 карандаша. Найдите цену тетради и цену карандаша, учитывая, что тетрадь и карандаш вместе стоят 3750 р.

795. На склад привезли пачки чая в пакетиках двух производителей. В пачках первого производителя было 1250 пакетиков, а в пачках второго — 2250, причем общее количество пачек чая первого и второго производителей равно 55. Учитывая, что количества пакетиков в пачках первого и второго производителей относятся как $2 : 3$, найдите эти количества.

796. На склад привезли пачки чая в пакетиках двух производителей. В пачках первого производителя было 2500 пакетиков, а в пачках второго — 3000, причем суммарное количество пакетиков чая в одной пачке первого и второго производителей равно 150. Учитывая, что количества пачек первого и второго производителей относятся как $5 : 3$, найдите эти количества.

* * *

797. Можно ли так записать числа в прямоугольную таблицу размерами 5 на 6 клеток, чтобы сумма чисел в каждой строке была равна 12, а в каждом столбце — 15?

798. Используя все цифры 0, 1, 2, ..., 9, запишите такое десятизначное число, чтобы число, записанное первой его цифрой, делилось на 1, записанное первыми двумя цифрами — на 2, первыми тремя цифрами — на 3 и т. д., а само число делилось на 10.

799. Каждая точка прямой окрашена в белый или красный цвет. Докажите, что на этой прямой есть отрезок, концы и середина которого окрашены одинаково.



Рациональные выражения

23. Рациональные дроби

А) Выражения, построенные из чисел и переменных с использованием действий сложения, вычитания, умножения, возведения в целую степень, а также деления на отличное от нуля число, называют **целым выражением**. Примерами целых выражений являются:

$$\frac{5}{7}ab^2c^3; \quad 2x^5 - 3xy + 7y; \quad (m^3 - n^3)(m + n); \quad \frac{u - 3v}{7};$$
$$-12,5z : 2,5; \quad \frac{p(p - 2q)}{11} + p - 3q^4.$$

А выражения

$$\frac{-7}{a}; \quad 4x : 3y; \quad u - \frac{v}{5 + u}; \quad \frac{m + n}{2m^2 + 3mn - n^3}$$

не являются целыми, поскольку в каждом из них содержится деление на выражение с переменными.

Выражение, содержащее деление на выражение с переменными, называют **дробным выражением** (рис. 430).

Любое целое выражение можно представить многочленом стандартного вида.

В область определения дробного выражения не входят те наборы значений переменных, для которых деление не выполнимо, если делитель равен нулю. Например, в область определения выражения $\frac{7}{6 - 2x} - 1,7$ не входит число 3, поскольку при этом значении переменной x выражение

Выражение построено из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в целую степень

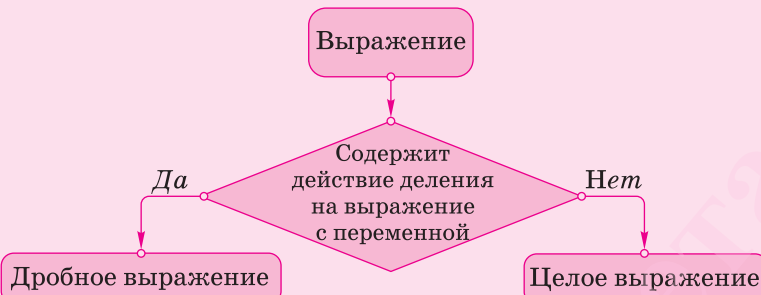


Рис. 430

$6 - 2x$ равно нулю. Все остальные числа составляют область определения выражения $\frac{7}{6 - 2x} - 1,7$. В область определения выражения $2a + \frac{a}{a - b}$ не входят пары равных друг другу чисел, поскольку при таких значениях переменных a и b выражение $a - b$ обращается в нуль. Все другие пары чисел составляют область определения выражения $2a + \frac{a}{a - b}$.

Б) Дробь, числитель и знаменатель которой являются многочленами стандартного вида, называют **рациональной дробью** (рис. 431). Примерами рациональных дробей являются:

$$\frac{x}{y}; \frac{a - 7}{13}; \frac{1,6}{u^2 + v^2}; \frac{r^2 - s}{r^2 - 3rs - s^4}; \frac{3x - 7}{5 + 6x}.$$

$$\text{Рациональная дробь} = \frac{\text{Многочлен}}{\text{Многочлен}}$$

Рис. 431

Пример 1. Найдем область определения рациональной дроби $\frac{3x}{x^2 + 2x}$. В нее не войдут те значения

переменной x , при которых знаменатель становится равным нулю. Чтобы найти их, надо решить уравнение $x^2 + 2x = 0$:

$$\begin{aligned}x(x + 2) &= 0; \\x &= 0 \text{ или } x + 2 = 0; \\x &= 0 \text{ или } x = -2.\end{aligned}$$

Значит, область определения составляют все числа, кроме чисел -2 и 0 .

Пример 2. Найдем область определения дроби $\frac{a + 2b}{a^2 - b^2}$. Ее образуют все пары чисел $(a; b)$, кроме тех, для которых $a^2 - b^2 = 0$. Преобразуем это условие:

$$\begin{aligned}(a - b)(a + b) &= 0; \\a - b &= 0 \text{ или } a + b = 0; \\a &= b \text{ или } a = -b.\end{aligned}$$

Значит, область определения дроби $\frac{a + 2b}{a^2 - b^2}$ составляют все пары чисел $(a; b)$, для которых $a \neq b$ и $a \neq -b$.

В) Поскольку в рациональной дроби значениями переменных являются числа, то для нее истинно **основное свойство дроби**:

$$\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}, \quad b \neq 0, k \neq 0.$$

Если числитель и знаменатель рациональной дроби умножить или разделить на одно и то же не равное нулю выражение, то получится равная ей рациональная дробь.

Основное свойство дроби является тождеством, поскольку оно верно при всех наборах значений переменных a, b, k из области определения. Его используют для приведения дроби к новому знаменателю (рис. 432).

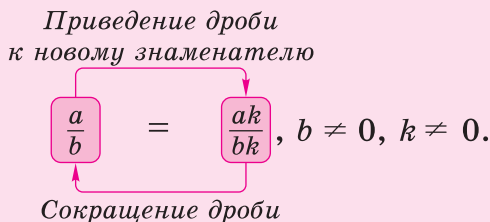


Рис. 432

Пример 3. Сократим дробь $\frac{m^3 - 25m}{2m^2 + 10m}$.

Сначала числитель и знаменатель дроби разложим на множители:

$$\frac{m^3 - 25m}{2m^2 + 10m} = \frac{m(m^2 - 25)}{2m(m + 5)} = \frac{m(m + 5)(m - 5)}{2m(m + 5)}.$$

Теперь сократим последнюю дробь на общий множитель $m(m + 5)$:

$$\frac{m(m + 5)(m - 5)}{2m(m + 5)} = \frac{m - 5}{2}.$$

Таким образом,

$$\frac{m^3 - 25m}{2m^2 + 10m} = \frac{m - 5}{2}.$$

Пример 4. Приведем дробь $\frac{5x}{6y}$ к знаменателю $42y^4$.

Выделим в выражении $42y^4$ множитель $6y$. Получим: $42y^4 = 6y \cdot 7y^3$. Умножим числитель и знаменатель дроби $\frac{5x}{6y}$ на $7y^3$. Получим:

$$\frac{5x}{6y} = \frac{5x \cdot 7y^3}{6y \cdot 7y^3} = \frac{35xy^3}{42y^4}.$$

Множитель $7y^3$ называют **дополнительным множителем** к числителю и знаменателю дроби $\frac{5x}{6y}$.

Пример 5. Приведем дробь $\frac{u}{2u-3v}$ к знаменателю $3v-2u$. Для этого используем основное свойство дроби, умножив числитель и знаменатель дроби на -1 :

$$\frac{u}{2u-3v} = \frac{u \cdot (-1)}{(2u-3v) \cdot (-1)} = \frac{-u}{3v-2u}.$$

Значение дроби не изменится, если одновременно изменить знаки ее числителя и знаменателя на противоположные.

Дробь $\frac{u}{2u-3v}$ тождественно равна дроби $-\frac{-u}{2u-3v}$, как и дроби $-\frac{u}{3v-2u}$.

Значение дроби не изменится, если изменить знак самой дроби и вместе с этим знак ее числителя или знаменателя (рис. 433).

$$\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b} = -\frac{-a}{b} = -\frac{a}{-b}.$$

Рис. 433

- ?**
1. Какое выражение называют целым?
 2. Какое выражение называют дробным?
 3. Каким выражением можно всегда представить целое выражение?
 4. Какие наборы значений переменных составляют область определения целого выражения?
 5. Какое дробное выражение называют рациональной дробью?
 6. Как найти область определения рациональной дроби?
 7. Сформулируйте основное свойство дроби.
 8. Как называют множитель, на который умножают числитель и знаменатель дроби при приведении ее к новому знаменателю?
 9. Сформулируйте правило об изменении знака числителя и знаменателя дроби.
 10. Сформулируйте правило об изменении знака самой дроби.

800. Запишите дробь по ее словесному описанию:

- а) разность переменных a и b , разделенная на их сумму;
- б) произведение переменных x и y , разделенное на их разность;
- в) утроенная сумма переменных k и l , разделенная на сумму утроенной переменной k и удвоенной переменной l ;
- г) числителем дроби является учетверенное произведение переменных u , v и w , а знаменателем — сумма произведения переменных u и v и удвоенной переменной w ;
- д) числителем дроби является утроенная разность переменных a и x , а знаменателем — учетверенная разность переменной a и удвоенной переменной x .

801. Найдите, при каких значениях переменной имеет значение выражение (рис. 434):

- а) $\frac{a+1}{a(a-1)}$; г) $\frac{y+7}{y^2-2y}$; ж) $\frac{3}{d+11} - \frac{d-11}{3}$;
- б) $\frac{3}{x^2-4}$; д) $\frac{-3,6}{c^2+25}$; з) $\frac{2,7}{t} + \frac{t-3}{t^2+7t}$;
- в) $\frac{4}{5b(b+3)}$; е) $\frac{z^2+100}{z^2+7z}$; и) $\frac{2}{x+2} - \frac{7-x}{16-x^2}$.

$$\frac{5}{n-4} - \frac{3n}{n^2-n};$$

$$n-4 \neq 0 \quad \text{и} \quad n^2-n \neq 0;$$

$$n \neq -4 \quad \text{и} \quad n \cdot (n-1) \neq 0;$$

$$n \neq -4 \quad \text{и} \quad n \neq 0 \text{ и } n \neq 1.$$

Ответ: все числа, кроме -4 ; 0 ; 1 .

Рис. 434

$$\frac{5s - 18}{8} = 4;$$

$$5s - 18 = 32;$$

$$5s = 50;$$

$$s = 10.$$

Ответ: при $s = 10$.

Рис. 435

802. При каком значении переменной значение 4 имеет дробь:

а) $\frac{x-2}{5};$

г) $\frac{4b+7}{9};$

б) $\frac{2a+3}{4};$

д) $\frac{3y-1}{6}?$

в) $\frac{5s-18}{8}$ (рис. 435);

803. Найдите значения выражений $\frac{a+4}{a-2}$ и $\frac{a^2}{2a+4}$, взяв значения переменной из таблицы.

a	-6	-2,4	-1	$-\frac{5}{6}$	0	1	$\frac{5}{6}$	2,4	6

804. Найдите значение дроби $\frac{2x}{x^2+2}$ при x , равном:

а) -2; в) $-\frac{2}{3};$ д) 0; ж) $\frac{2}{3};$ и) 1,5;

б) -1,5; г) $-\frac{1}{2};$ е) $\frac{1}{2};$ з) 1; к) 2.

805. Запишите многочленом выражение:

а) $(3a - c)(c + 3a) - (a + 2c)(c - 3a);$

б) $(x - 3y)(x + 4y) + (x - 4y)(4y + x);$

в) $\frac{3}{4}b(4b + 1)(4b - 1) - 0,25\left(16b^2 + \frac{3}{4}\right);$

г) $\frac{5}{7}k(7k - 2)(7k + 2) - \frac{2}{3}k\left(6k^2 + \frac{3}{14}\right);$

д) $0,4t(5s - 2,5t) - 8(0,25t + s)(s - 0,25t);$

е) $0,6u(4v - 2,5u) - 1,4(2v - 5u)(5u - 2v).$

806. Найдите значение выражения:

а) $6\left(a^2 - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3} - a^2\right) - 6a^2(1 - a^2) - \frac{2}{3}(9a^2 - 4)$ при $a = -4; -0,5; 0; 0,5; 4;$

б) $4,9x\left(\frac{2}{7}x^2 - x\right)\left(\frac{2}{7}x^2 + x\right) - 0,2x^3(2x^2 + 1)$ при $x = -10$;
 -3 ; 0 ; 3 ; 10 .

807. Докажите тождество:

а) $4(4a^2 - 4a + 1)\left(0,5a + \frac{1}{4}\right) + (2a^7 - a^6) : \left(-\frac{1}{4}a^4\right) = 1 - 2a$;

б) $\left(\frac{1}{3}(1 - 3y)(1 + 3y) - \frac{1}{6}(2 - 1,5y)(3 + 6y)\right) : \left(-\frac{1}{4}\right) = 6y^2 + 5y + 2\frac{2}{3}$.

808. При вычислении значений дроби $\frac{1}{1+\alpha}$ для значений α , близких к нулю, пользуются приближенным равенством $\frac{1}{1+\alpha} \approx 1 - \alpha$. По этой формуле вычислите:

а) $\frac{1}{1,01}$; г) $\frac{1}{0,995}$; ж) $\frac{1}{2,001}$; к) $\frac{4}{3,9964}$;

б) $\frac{1}{1,03}$; д) $\frac{2}{1,03}$; з) $\frac{1}{1,993}$; л) $\frac{7}{4,0002}$;

в) $\frac{1}{0,98}$; е) $\frac{5}{0,9983}$; и) $\frac{3}{3,0015}$; м) $\frac{11}{2,9997}$.

809. Сократите дробь (рис. 436):

а) $\frac{14ab}{21bc}$; в) $\frac{-27u^2v}{3v^3}$; д) $\frac{-gh^3}{h^2f}$; ж) $\frac{28s^2t^2}{42st}$;

б) $\frac{12xy^2}{18yz^2}$; г) $\frac{3ij^3}{-i^2k}$; е) $\frac{9dpq}{18d^4q}$; з) $\frac{63a^3x^2}{45a^5x^6}$.

$$\frac{36t^2uv^5}{45tu^3v^7} = \frac{9tuv^5 \cdot 4t}{9tuv^5 \cdot 5u^2v^2} = \frac{4t}{5u^2v^2}.$$

Рис. 436

810. Сократите дробь (рис. 437):

а) $\frac{x-y}{y-x}$; в) $\frac{6c(c-g)}{36c(g-c)}$;

б) $\frac{u(b-u)}{v(u-b)}$; г) $\frac{8d(e-f)}{32d^2(f-e)}$;

$$\begin{array}{ll} \text{д)} \frac{14m^2n^2(m-4)}{21mn^4(4-m)}; & \text{ж)} \frac{95u^3v^4(4-5v)}{57uv^6(5v-4)}; \\ \text{е)} \frac{28ij^5(2i-3j)}{42i^3j^4(3j-2i)}; & \text{з)} \frac{136k^4l(4-k)(3-l)}{102k^4l^4(k-4)(l-3)}. \end{array}$$

$$\frac{\overset{6}{90}\overset{1}{a^2}\overset{-1}{b^3}(\overset{1}{b-2})(\overset{1}{3-a})}{\overset{5}{75}\overset{1}{a^2}\overset{-1}{b^3}(\overset{1}{2-b})(\overset{-1}{a-3})} = \frac{6b^2}{5a^2}.$$

Рис. 437

811. Разложив на множители числитель и знаменатель, сократите дробь (рис. 438):

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \frac{2a+10b}{2ab}; & \text{г)} \frac{3t(t+7)}{4t+28}; & \text{ж)} \frac{u^3-2u^2}{3u^2-6u}; \\ \text{б)} \frac{14x-21y}{28y}; & \text{д)} \frac{m-4n}{m^2-4mn}; & \text{з)} \frac{4p^6+6p^3}{3p^5+2p^8}. \\ \text{в)} \frac{3c-9}{2(c-3)}; & \text{е)} \frac{3g^2+24gh}{g+8h}; & \end{array}$$

$$\frac{x^2y^3-x^3y^2}{x^2y^2} = \frac{x^2y^2(y-x)}{x^2y^2} = y-x.$$

Рис. 438

812. Приведите дроби $\frac{7}{6mn^2}$ и $\frac{5}{8m^2n}$ к знаменателю:

$$\text{а)} 48m^3n^3; \quad \text{б)} 96m^4n^2; \quad \text{в)} 24m^2n^2; \quad \text{г)} 24m^6n^5.$$

813. Приведите дробь (рис. 439):

$$\begin{array}{l} \text{а)} \frac{4}{x-y} \text{ к знаменателю } (x-y)^2; \\ \text{б)} \frac{x}{a-b} \text{ к знаменателю } a^2-b^2; \\ \text{в)} \frac{b}{u+v} \text{ к знаменателю } (u+v)^3; \\ \text{г)} \frac{3c}{b-1} \text{ к знаменателю } b^3-1; \\ \text{д)} \frac{1,9}{q-3} \text{ к знаменателю } 9-q^2; \end{array}$$

- е) $\frac{s^3}{r+t}$ к знаменателю $r^2 - t^2$;
 ж) $\frac{13}{z-13}$ к знаменателю $13 - z$;
 з) $\frac{2g}{g+h}$ к знаменателю $g^3 + h^3$;
 и) $\frac{1,4}{x^2 + 2x + 4}$ к знаменателю $x^3 - 8$;
 к) $\frac{i+5}{15-3i}$ к знаменателю $3(i^2 - 25)$.

$$\frac{3(u^2 - 25)}{15 - 3u} = \frac{3(u-5)(u+5)}{3(5-u)} = -(u+5);$$

$$\frac{(u+5) \cdot (-(u+5))}{(15-3u) \cdot (-(u+5))} = -\frac{(u+5)^2}{3(u^2-25)} = \frac{(u+5)^2}{3(25-u^2)}.$$

Рис. 439

814. Преобразуйте дробь в тождественно равную дробь, перед которой стоит знак минус:

- а) $\frac{2-a}{b}$; в) $\frac{m-n}{2+l}$; д) $\frac{7-k}{k-11}$; ж) $\frac{5+t}{t-17}$;
 б) $\frac{2x}{3-x}$; г) $\frac{u-3}{4-u}$; е) $\frac{c-y}{d-y}$; з) $\frac{g+h}{h+f}$.

815. Сократите дробь:

- а) $\frac{a^6 + a^4}{a^4 + a^2}$; г) $\frac{z^7 - z^5}{z^4 - z^3}$; ж) $\frac{(5u+10v)^2}{4u+8v}$;
 б) $\frac{y^6 - y^8}{y^4 - y^2}$; д) $\frac{(6s-6t)^2}{s-t}$; з) $\frac{9g^2 - h^2}{(15g+5h)^2}$;
 в) $\frac{b^7 - b^{10}}{b^5 - b^2}$; е) $\frac{(4c+12d)^2}{c+3d}$; и) $\frac{d^5 - 4d^3}{4-d^2}$.

816. Сократите дробь (рис. 440):

- а) $\frac{ax+ay-bx-by}{ax-ay-bx+by}$; б) $\frac{mk-nk+ml-nl}{mk+nk+ml+nl}$;

$$\begin{array}{ll} \text{в)} \frac{pq + pr + q^2 + qr}{ps + pt + qs + qt}; & \text{е)} \frac{u^3 - u^2 - u + 1}{u^4 - 2u^2 + 1}; \\ \text{г)} \frac{(m + n)^2 - k^2}{m + n + k}; & \text{ж)} \frac{1 - 3v + 3v^2 - v^3}{r - rv + s - sv}; \\ \text{д)} \frac{i^2 + j^2 - k^2 + 2ij}{i^2 - j^2 + k^2 + 2ik}; & \text{з)} \frac{t^2 - gt + ht - gh}{t^3 + ht^2 + gt + gh}. \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \frac{10x^2 - 10y^2}{(2x + 3y)^2 - (3x + 2y)^2} = \\ & = \frac{10 \cdot (x^2 - y^2)}{(2x + 3y - 3x - 2y) \cdot (2x + 3y + 3x + 2y)} = \\ & = \frac{10 \cdot (x - y) \cdot (x + y)}{(-x + y) \cdot (5x + 5y)} = \frac{10 \cdot (x - y) \cdot (x + y)}{(-x + y) \cdot 5 \cdot (x + y)} = -2. \end{aligned}$$

Рис. 440

817. Найдите значение дроби:

$$\begin{array}{l} \text{а)} \frac{12x^2 - 9xy}{4xy - 3y^2} \text{ при } x = \frac{2}{7} \text{ и } y = 1,4; \\ \text{б)} \frac{16a^2 - 9b^2}{20a^2b - 15ab^2} \text{ при } a = \frac{3}{4} \text{ и } b = \frac{2}{3}; \\ \text{в)} \frac{7p^2 + 21pq}{18q^2 + 6pq} \text{ при } p = \frac{4}{35} \text{ и } q = \frac{1}{24}; \\ \text{г)} \frac{m^2 + 14mn + 49n^2}{35mn + 5m^2} \text{ при } m = -1,2 \text{ и } n = \frac{4}{35}. \end{array}$$

818. Решите уравнение относительно переменной x (рис. 441):

$$\begin{aligned} sx + x &= s^2 + 2s + 1; \\ x(s + 1) &= (s + 1)^2; \\ x &= \frac{(s + 1)^2}{s + 1}; \\ x &= s + 1. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} \text{а)} ax - 2x = a^2 - 4; \\ \text{б)} px - qx = 6p - 6q; \\ \text{в)} gfx - efх = f^2g - ef^2; \\ \text{г)} mx - nx = m^2 - n^2; \\ \text{д)} k^2x - l^2x = k^2 + kl + l^2; \end{array}$$

Рис. 441

- е) $7ux + 7vx = 21u^2 - 21v^2$;
 ж) $sx + x = s^2 + 2s + 1$;
 з) $i^2x + 2ijx + j^2x = 4i^2 - 4j^2$.

819. Представьте многочленом выражение:

- а) $(a + 8)^2$; д) $(b + 2c)(b - 2c)$;
 б) $(x - 4y)^2$; е) $(5 - 7z)(7z - 5)$;
 в) $(m - 5)^3$; ж) $(g - 3h)(g^2 + 3gh + 9h^2)$;
 г) $(2u + 3v)^3$; з) $(4p^2 - 6pq + 9q^2)(2p + 3q)$.

820. Упростите выражение:

- а) $6x^2 - (2x - 4)(3x + 5)$;
 б) $\left(3a - \frac{2}{3}\right)\left(3a + \frac{2}{3}\right) - \frac{8}{9}$;
 в) $3b(b - 1,2c) - 1,2(5b + c)(c - b)$;
 г) $4(k - 3l)(3l - k) - 0,5k(30l - 72k)$.

821. Разложите на множители:

- а) $x^4 - y^4$; д) $4(z - 2)^2 + 9 + 12(z - 2)$;
 б) $-a^3 - a + 2a^2$; е) $a^2 - b^2 + t^2 - s^2 + 2(at - bs)$;
 в) $b^2 - ab - b + a$; ж) $u^2 + 2uv + v^2 - ux - vx$;
 г) $m^2n^5 - 1000m^5n^2$; з) $cf - df - c^2 + 2cd - d^2$.

822. Разложите на множители:

- а) $121 - u^2$; ж) $(c^3 + 1)^2 - (d^3 - 1)^2$;
 б) $81v^4 - w^2$; з) $s^3 + 8 + 6s^2 + 12s$;
 в) $25m^2n - 4n^3$; и) $8x^3 + 27$;
 г) $24x^5 - 3x^2$; к) $1000i^3 - 27j^3$;
 д) $f^6 - f^5 - f^2 + f$; л) $125a^3b^6 + 216c^6$;
 е) $p^5 + p^3 - p^2 - 1$; м) $343g^3h^9 - 512i^6j^9$.

823. Отрезок LM является медианой треугольника KLN (рис. 442). Докажите, что треугольники KLM и NLM равновелики.

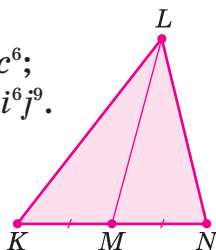


Рис. 442

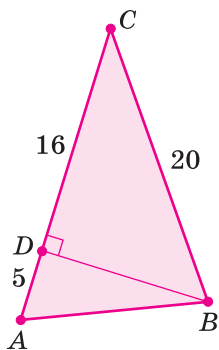


Рис. 443

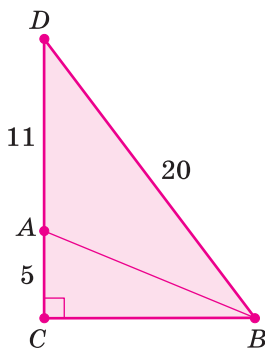


Рис. 444

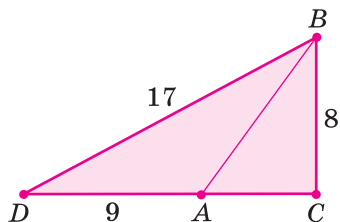


Рис. 445

824. Найдите длину отрезка AB по данным, приведенным на рисунке:

- а) 443; б) 444; в) 445.

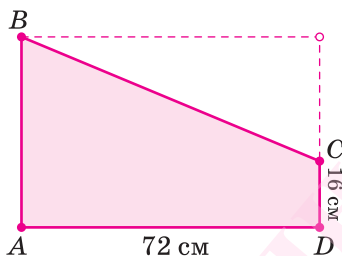


Рис. 446

825. От прямоугольной пластины отрезали треугольную часть. В результате получился четырехугольник $ABCD$ площадью 2232 см^2 , две стороны которого равны 72 см и 16 см (рис. 446). Найдите другие стороны четырехугольника $ABCD$.

826. Когда к 10-процентному раствору кислоты долили определенное количество ее 60-процентного раствора, то получили 200 мл 20-процентного раствора. Сколько миллилитров каждого раствора использовали?

827. По Узденскому району протекают притоки Немана — реки Лоша и Уса, а также приток Птичи — река Шать. Длина Шати относится к длине Лоши как $5:6$, а к длине Усы — как $7:23$. Найдите длины этих рек, учитывая, что Уса длиннее Лоши на 73 км .

828. На рисунке 447 показан прямоугольный параллелепипед, разрезанный на две одинаковые части, каждая из которых является *призмой*. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 16 см, 30 см и 40 см. Найдите объем и полную поверхность призмы $ABCA_1B_1C_1$.

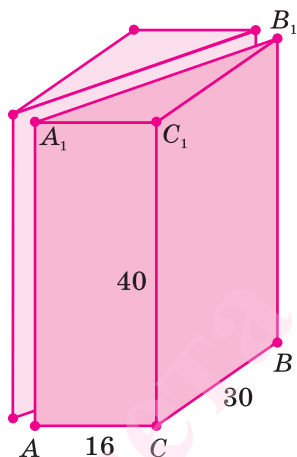


Рис. 447

829. На первой ферме корова дает 25 л молока в день, что на 5 л больше удойности коровы на второй ферме. Всего на первой ферме надаивают за день молока на 6000 л больше, чем на второй ферме. Найдите, сколько молока надаивают в день на первой ферме, учитывая, что на ней на 200 коров больше, чем на второй ферме.

830. Имеются две емкости в форме прямоугольного параллелепипеда. Объем первой емкости — 36 м^3 , объем второй — 90 м^3 , а высота первой емкости на 2 м меньше высоты второй. Учитывая, что площади дна первой и второй емкостей относятся как $2 : 3$, найдите эти площади.

831. Имеются две емкости в форме прямоугольного параллелепипеда. Объем первой емкости — 48 м^3 , объем второй — 60 м^3 , а площадь дна первой емкости на 7 м^2 меньше площади дна второй. Учитывая, что высоты первой и второй емкостей относятся как $3 : 2$, найдите эти высоты.

* * *

832. На плоскости отмечены четыре точки. Докажите, что из них можно образовать две группы так, что эти группы нельзя отделить одну от другой никакой прямой.

833. Докажите, что равенство $x^2 + 3xy = 5$ не выполняется ни при каких целых значениях x и y .

834. В последовательности 4, 9, 3, 2, 5, 7, ... каждое число, начиная с третьего, является последней цифрой суммы двух предыдущих чисел. Могут ли встретиться в ней такие последовательные числа, как 5 и 4? Если да, то какое число будет стоять перед этой группой?

24. Действия над рациональными дробями

А) Сложение и вычитание рациональных дробей с одинаковыми знаменателями выполняются по тем же правилам, что и сложение и вычитание обыкновенных дробей:

$\frac{a}{k} + \frac{b}{k} = \frac{a+b}{k};$	$\frac{a}{k} - \frac{b}{k} = \frac{a-b}{k}.$

Чтобы сложить рациональные дроби с одинаковыми знаменателями, надо сложить их числители, оставив прежний знаменатель.

Чтобы из одной рациональной дроби вычесть вторую с тем же знаменателем, надо из числителя первой дроби вычесть числитель второй, оставив прежний знаменатель.

Пример 1. Сложим дроби $\frac{5x+7y}{12xy}$ и $\frac{3x-11y}{12xy}$. Получим:

$$\begin{aligned}\frac{5x+7y}{12xy} + \frac{3x-11y}{12xy} &= \frac{5x+7y+3x-11y}{12xy} = \\ &= \frac{8x-4y}{12xy} = \frac{4(2x-y)}{12xy} = \frac{2x-y}{3xy}.\end{aligned}$$

Пример 2. Найдем разность дробей $\frac{7a+9b}{4a+2b}$ и $\frac{3a-5b}{4a+2b}$. Получим:

$$\begin{aligned} & \frac{7a+9b}{4a+2b} - \frac{3a-5b}{4a+2b} = \frac{7a+9b-(3a-5b)}{4a+2b} = \\ & = \frac{7a+9b-3a+5b}{4a+2b} = \frac{4a+14b}{4a+2b} = \frac{2(2a+7b)}{2(2a+b)} = \frac{2a+7b}{2a+b}. \end{aligned}$$

Чтобы выполнить сложение или вычитание дробей с разными знаменателями, нужно предварительно привести их к общему знаменателю.

Пример 3. Упростим выражение

$$\frac{3}{p+3} + \frac{2p-1}{3-p} + \frac{2p^2}{p^2-9}.$$

Прежде чем найти общий знаменатель, разложим знаменатели дробей на множители:

$$\frac{3}{p+3} + \frac{2p-1}{3-p} + \frac{2p^2}{p^2-9} = \frac{3}{p+3} + \frac{2p-1}{3-p} + \frac{2p^2}{(p+3)(p-3)}.$$

Общим знаменателем дробей является выражение $(p+3)(p-3)$. Значит, дополнительными множителями будут выражения: $p-3$, $-(p+3)$ и 1. Далее получим:

$$\begin{aligned} \frac{3}{p+3} + \frac{2p-1}{3-p} + \frac{2p^2}{p^2-9} &= \overset{p-3}{\frac{3}{p+3}} + \overset{-(p+3)}{\frac{2p-1}{3-p}} + \overset{1}{\frac{2p^2}{p^2-9}} = \\ &= \frac{3(p-3) - (2p-1)(p+3) + 2p^2}{(p+3)(p-3)} = \\ &= \frac{3p-9-2p^2-6p+p+3+2p^2}{(p+3)(p-3)} = \frac{-2p-6}{(p+3)(p-3)} = \\ &= \frac{-2(p+3)}{(p+3)(p-3)} = \frac{-2}{p-3} = -\frac{2}{p-3}. \end{aligned}$$

Б) Умножение и деление рациональных дробей, возведение рациональной дроби в степень выполняются по тем же правилам, по которым выполняются эти действия над обыкновенными дробями:

$\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \frac{am}{bn};$	$\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{m}.$

Чтобы умножить дробь на дробь, надо произведение числителей дробей-множителей записать числителем дроби, а произведение знаменателей — знаменателем дроби.

Чтобы разделить одну дробь на другую, надо дробь-делимое умножить на дробь, обратную дробь-делителю.

Пример 4. Разделим дробь $\frac{2l+1}{l+3}$ на дробь $\frac{3+l}{l^2}$. Получим:

$$\begin{aligned}\frac{2l+1}{l+3} : \frac{3+l}{l^2} &= \frac{2l+1}{l+3} \cdot \frac{l^2}{3+l} = \\ &= \frac{(2l+1) \cdot l^2}{(l+3) \cdot (l+3)} = \frac{2l^3 + l^2}{(l+3)^2}.\end{aligned}$$

Пример 5. Перемножим дроби $\frac{8x^2}{y^3}$ и $\frac{5y^4}{12x^3}$. Получим:

$$\frac{8x^2}{y^3} \cdot \frac{5y^4}{12x^3} = \frac{8x^2 \cdot 5y^4}{y^3 \cdot 12x^3} = \frac{10y}{3x}.$$

В) Произведение трех и более множителей находят по тому же правилу, что и произведение двух множителей. Учитывая, что произведение нескольких одинаковых множителей представляется степенью, получим тождество:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k}.$$

Чтобы возвести в степень дробь, надо эту степень числителя записать числителем дроби, а степень знаменателя — знаменателем дроби.

Пример 6. Возведем дробь $\frac{3u^3v}{u^2+v}$ в четвертую степень. Получим:

$$\left(\frac{3u^3v}{u^2+v}\right)^4 = \frac{(3u^3v)^4}{(u^2+v)^4} = \frac{81u^{12}v^4}{(u^2+v)^4}.$$

Пример 7. Упростим выражение $(m + n) : \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)$.
Получим:

$$\begin{aligned}(m + n) : \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) &= (m + n) : \frac{n + m}{mn} = \\&= \frac{m + n}{1} \cdot \frac{mn}{m + n} = \frac{(m + n)mn}{m + n} = mn.\end{aligned}$$



1. Запишите тождество, выражающее правило сложения дробей с одинаковыми знаменателями. Сформулируйте это правило словами.
2. Запишите тождество, выражающее правило вычитания дробей с одинаковыми знаменателями. Сформулируйте это правило словами.
3. Как выполняют сложение и вычитание дробей с разными знаменателями?
4. Запишите тождество, выражающее правило умножения дробей. Сформулируйте это правило словами.
5. Запишите тождество, выражающее правило деления дробей. Сформулируйте это правило словами.
6. Запишите тождество, выражающее правило возведения дроби в степень. Сформулируйте это правило словами.

835. Представьте дробью выражение:

- а) $\frac{2a + 5}{9a} + \frac{2a - 3}{9a} - \frac{5a + 6}{9a}$;
- б) $\frac{x - 1}{5} + \frac{x - 2}{5} - \frac{2x + 8}{5}$;
- в) $\frac{3b + 1}{c} - \frac{2b - 1}{c} + \frac{b + 2}{c}$;
- г) $\frac{4u - 3}{3u} - \frac{5 - 4u}{3u} - \frac{u + 1}{3u}$;
- д) $\frac{5f - 2e}{4ef} - \frac{3e + 2f}{4ef} + \frac{e - f}{4ef}$;
- е) $\frac{9r + 5s}{6s^3} + \frac{s - 7r}{6s^3} + \frac{3s - 2r}{6s^3}$;

$$\text{ж)} \frac{g+5h}{7gh} - \frac{6h-2g}{7gh} + \frac{g+h}{7gh};$$

$$\text{з)} \frac{k^3-k^2}{6} + \frac{2k^3+4k}{6} - \frac{2k^3-5k}{6}.$$

836. Найдите значение выражения:

$$\text{а)} \frac{x^2-9}{x+7} - \frac{40}{x+7} \text{ при } x = -17,7; 0; 17,7;$$

$$\text{б)} \frac{7a-2}{a^2-16} - \frac{4a-14}{a^2-16} \text{ при } a = -3,5; 0; 4;$$

$$\text{в)} \frac{c^2+3}{c^3-8} + \frac{2c+1}{c^3-8} \text{ при } c = -2; -\frac{2}{7}; 0; \frac{2}{7}; 2;$$

$$\text{г)} \frac{2y^2+8}{y^3+27} - \frac{y^2+3y-1}{y^3+27} \text{ при } y = -3; -\frac{4}{13}; \frac{4}{13}; 1\frac{4}{13}; 3.$$

837. Упростите выражение (рис. 448):

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \frac{a}{b-1} + \frac{7}{1-b}; & \text{ж)} \frac{z-5}{z-2} - \frac{3}{2-z}; \\ \text{б)} \frac{x}{y-3} - \frac{5}{3-y}; & \text{з)} \frac{k}{3k-l} + \frac{2k-l}{l-3k}; \\ \text{в)} \frac{3u}{c-d} + \frac{3v}{d-c}; & \text{и)} \frac{t}{t^2-9} + \frac{3}{9-t^2}; \\ \text{г)} \frac{4s}{2t-s} + \frac{8s}{s-2t}; & \text{к)} \frac{w^2}{w-1} + \frac{1}{1-w}; \\ \text{д)} \frac{8e}{f-g} + \frac{5e}{g-f}; & \text{л)} \frac{m^2}{(m-6)^2} - \frac{36}{(6-m)^2}; \\ \text{е)} \frac{5i}{i-j} + \frac{5j}{j-i}; & \text{м)} \frac{n^2+36}{(n-6)^2} + \frac{12n}{(6-n)^2}. \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{4c^2}{3c-2} + \frac{5(4c-5)}{2-3c} &= \frac{4c^2}{3c-2} - \frac{5(4c-5)}{3c-2} = \\ &= \frac{4c^2-20c+25}{3c-2} = \frac{(2c-5)^2}{3c-2}. \end{aligned}$$

Рис. 448

838. Алгебраической суммой запишите дробь (рис. 449):

а) $\frac{a^2 + b^2}{b^2}$; б) $\frac{3u - 2v}{v}$; в) $\frac{d^2 + 1}{3d}$; г) $\frac{m^2 - 4mn}{m^2}$.

$$\frac{6k^2 + 15k - 2}{6k} = \frac{6k^2}{6k} + \frac{15k}{6k} - \frac{2}{6k} = k + \frac{5}{2} - \frac{1}{3k}.$$

Рис. 449

839. Представьте дробью выражение:

а) $\frac{5a}{4} - \frac{3a}{9}$; и) $\frac{1}{4p} + \frac{1}{2q}$;
 б) $\frac{4x}{5} - \frac{9x}{4}$; к) $\frac{4}{3k} - \frac{5}{9l}$;
 в) $\frac{8y}{15x} - \frac{7y}{12x}$; л) $\frac{r}{6a} + \frac{s}{8b}$;
 г) $\frac{11b}{12} - \frac{7b}{10}$; м) $\frac{l}{12f} - \frac{g}{18h}$;
 д) $\frac{1}{6mn} + \frac{2}{5mn}$; н) $\frac{15t - v}{9w} - \frac{2a - 4v}{15w}$;
 е) $\frac{7}{27ij} - \frac{5}{18ij}$; о) $\frac{9x + 4}{8j} - \frac{3x - 1}{6j}$;
 ж) $\frac{4u}{5v} - \frac{3u}{4v}$; п) $\frac{m + n}{k^2} + \frac{m - n}{kl}$;
 з) $\frac{5s}{6t} - \frac{7s}{30t}$; р) $\frac{y - 2z}{yz^2} - \frac{2z - y}{y^2z}$.

840. Представьте дробью сумму или разность:

а) $\frac{a - b}{ab} - \frac{a - c}{ac}$; д) $\frac{2i - j}{2i^2j} - \frac{2j - i}{3ij^2}$;
 б) $\frac{x - 2y}{4y} - \frac{y - 2x}{4x}$; е) $\frac{2u - 5v}{2u^2v} - \frac{6v - 9u}{5uv^2}$;
 в) $\frac{c - d}{c^3d^2} - \frac{c + d}{c^2d^3}$; ж) $\frac{2g - 3h}{g} + \frac{4g^2 - 5h^2}{gh}$;
 г) $\frac{2l + 3f}{6l^2f} - \frac{3f - 4l}{9lf^2}$; з) $\frac{5k^2 - l^2}{kl} - \frac{3k - 2l}{l}$;

$$\begin{array}{ll} \text{и)} \frac{2m^2 - 3nx}{nx} - \frac{mn - 5nx}{mx}; & \text{л)} \frac{1}{r^4 s^3} + \frac{2}{r^3 s^4}; \\ \text{к)} \frac{3p^2 + 5pq}{pr} + \frac{q^2 - 3pr}{qr}; & \text{м)} \frac{3}{t^3 w^3} - \frac{4}{t^4 w^2}. \end{array}$$

841. Преобразуйте в дробь выражение (рис. 450):

$$\begin{array}{ll} \text{а)} m + \frac{1}{n}; & \text{ж)} \frac{(g-h)^2}{2g} + h; \\ \text{б)} \frac{1}{p} - p; & \text{з)} i - \frac{(j+i)^2}{2j}; \\ \text{в)} 2q - \frac{q}{4}; & \text{и)} \frac{x-1}{4} + \frac{3x-1}{2} - \frac{5x-1}{6}; \\ \text{г)} 4r - \frac{2}{r}; & \text{к)} \frac{2a-3b}{2} - \frac{a-2b}{3} + \frac{b-a}{4}; \\ \text{д)} \frac{u^2+v}{u} - u; & \text{л)} \frac{y-2z}{4} - \frac{3(z-2y)}{6} + \frac{y+z}{12}; \\ \text{е)} 2e - \frac{4e^2+1}{2e}; & \text{м)} \frac{2c-3d}{2} - \frac{2(c-2d)}{5} + \frac{3(c-d)}{2}. \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{3}{5a-b}}{2} - \frac{\frac{2}{2(b-1)}}{3} - \frac{\frac{1}{2b+1}}{6} &= \frac{15a-3b-4b+4-2b-1}{6} = \\ \frac{15a-9b+3}{6} &= \frac{3(5a-3b+1)}{2 \cdot 3} = \frac{5a-3b+1}{2}. \end{aligned}$$

Рис. 450

842. Преобразуйте в дробь выражение (рис. 451):

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \frac{x+3}{x^2-2x} - \frac{x}{x^2-4}; & \text{д)} \frac{p}{p-q} + \frac{p^2-3pq}{(p-q)(p+q)}; \\ \text{б)} \frac{9-a^2}{4-a^2} - \frac{a+4}{a+2}; & \text{е)} \frac{m^2-4mn}{n^2-m^2} - \frac{n}{m-n}; \\ \text{в)} \frac{4}{2u+1} + \frac{u+5}{1-4u^2}; & \text{ж)} \frac{u^2-4uv}{u^2-v^2} - \frac{u-3v}{u+v}; \\ \text{г)} \frac{(b+c)^2}{b^2+bc} + \frac{(b-c)^2}{b^2-bc}; & \text{з)} \frac{1}{z+z^2} - \frac{z+2}{z^2-1}. \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{s^3 - 3s^2} - \frac{3}{s^3 - 6s^2 + 9s} &= \frac{\frac{(s-3)}{3}}{s^2(s-3)} - \frac{\frac{s}{3}}{s(s-3)^2} = \\ &= \frac{3s - 9 - 3s}{s^2(s-3)^2} = -\frac{9}{s^2(s-3)^2}. \end{aligned}$$

Рис. 451

843. Докажите тождество (рис. 452):

а) $\frac{2a}{3a+3b} + \frac{4b}{3a-3b} = \frac{2a(a+b) + 4b^2}{3a^2 - 3b^2};$

б) $\frac{5y}{ax+bx} - \frac{2x}{ay+by} = \frac{5y^2 - 2x^2}{xy(a+b)}.$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{m^3}}{m^2-4} - \frac{\frac{m+2}{m}}{m-2} - \frac{\frac{m-2}{2}}{m+2} &= m-1. \\ \frac{m^3 - m^2 - 2m - 2m + 4}{m^2 - 4} &= \\ &= \frac{m^3 - m^2 - 4m + 4}{m^2 - 4} = \\ &= \frac{m^2(m-1) - 4(m-1)}{m^2 - 4} = \\ &= \frac{(m-1)(m^2 - 4)}{m^2 - 4} = m-1. \end{aligned}$$

Рис. 452

844. Упростите выражение:

а) $\frac{3}{a+1} + \frac{4}{a-1} - \frac{5a}{(a+1)^2};$

б) $\frac{4}{b+2} - \frac{5}{b-2} + \frac{6b}{b^2+4b+4};$

в) $\frac{1}{x-3} - \frac{3}{2x+6} - \frac{3x}{2x^2-12x+18};$

г) $\frac{6}{y} - \frac{4}{y-2z} - \frac{y-z}{4z^2-y^2};$

д) $\frac{2}{c-2d} + \frac{2}{c+2d} + \frac{4c^2}{4cd^2-c^3};$

$$\text{е)} \frac{3m-4}{3-2m} - \frac{5+4m}{3+2m} - \frac{2-m+6m^2}{4m^2-9};$$

$$\text{ж)} \frac{3q+1}{2q} - \frac{3q}{2q-1} - \frac{1}{2q-4q^2};$$

$$\text{з)} \frac{5}{1-u} - \frac{1-2u}{u^2+u+1} + \frac{3u^2-4u+5}{u^3-1}.$$

845. Представьте дробью выражение:

$$\text{а)} \frac{6a}{25b} \cdot \frac{5}{3};$$

$$\text{и)} \frac{2s}{3t} \cdot \frac{6tr}{5s^2};$$

$$\text{б)} \frac{x^2}{y^3} \cdot \frac{y^2}{x^3};$$

$$\text{к)} \frac{45i^5}{64j^4} \cdot \frac{8j^3}{15i^3};$$

$$\text{в)} \frac{13}{5e} \cdot \frac{e^4}{13f};$$

$$\text{л)} \frac{20m^4}{11n^3} \cdot \frac{22n^5}{25m^2};$$

$$\text{г)} \frac{14g^3}{15h} \cdot \frac{1}{7g^3};$$

$$\text{м)} -\frac{19u^4}{11v^7} \cdot \frac{22v^6}{57u^3};$$

$$\text{д)} \frac{3cd}{4uv} \cdot \frac{10u^2v}{21c^2d};$$

$$\text{н)} \frac{54w^4}{3,7z^5} \cdot \left(-\frac{3,7z^3}{18w^5}\right);$$

$$\text{е)} \frac{11k^4}{8} \cdot \frac{16l}{k^5};$$

$$\text{о)} -\frac{28cy^3}{15d^2z} \cdot \frac{10cd}{21yz};$$

$$\text{ж)} \frac{4i^3}{3j^2} \cdot \frac{15l}{2};$$

$$\text{п)} -\frac{36i^2j^3}{33k^2l} \cdot \left(-\frac{44kl}{27i^2j^2}\right);$$

$$\text{з)} \frac{17p^3}{18q} \cdot \frac{24q^4}{34q^4};$$

$$\text{р)} \frac{56g^2h^4}{51xy^5} \cdot \left(-\frac{68x^5y}{35g^4h^2}\right).$$

846. Упростите выражение (рис. 453):

$$\text{а)} \frac{2x^2y}{3ab} \cdot \frac{9a^2b}{4xy^2} \cdot \frac{6ax}{15y^3};$$

$$\text{б)} \frac{42u^3v^2}{5w^3} \cdot \frac{v^4}{49u^5w^3} \cdot \frac{35u^2w^2}{6v^7};$$

$$\text{в)} \frac{20c^4d^3}{21e^7} \cdot \frac{7c^3e^4}{4d^6f^2} \cdot \frac{3e^3d^2}{5e^6f};$$

$$\text{г)} \frac{2g^2}{3hk} \cdot \frac{5h^2}{4gk} \cdot \frac{18z^5}{25gh};$$

$$\text{д)} \frac{5m^2n}{3kl} \cdot \frac{4kl}{15n^4} \cdot \frac{9n^3k^2}{16m^2};$$

$$\begin{aligned} & \frac{5a^3b^2}{6n^2} \cdot \frac{b^3n^6}{3a^4m^4} \cdot \frac{36a^4m^3}{5b^5n^4} = \\ & = \frac{5 \cdot 36 \cdot a^3b^2 \cdot b^3n^6 \cdot a^4m^3}{6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot n^2 \cdot a^4m^4 \cdot b^5n^4} = \\ & = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{a^3}{a^4} \cdot \frac{b^5}{b^5} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{m} = \frac{2a^3}{m}. \end{aligned}$$

Рис. 453

$$\text{е)} \frac{i^3 j^5}{3p^4 q^4} \cdot \frac{36p^4 q^3}{5i^2 j^4} \cdot \frac{5p^3 i^2}{4j^2}; \quad \text{з)} \frac{11ax^2}{21b^3 z} \cdot \frac{28d^3 z^4}{15cx^3} \cdot \frac{24b^2 x^2}{33a^3 z^4}.$$

$$\text{ж)} \frac{9rs}{5tv} \cdot \frac{3tv}{4ru} \cdot \frac{4vu}{3rst};$$

847. Упростите выражение:

$$\text{а)} \left(\frac{a}{4b}\right)^3; \quad \text{г)} \left(-\frac{2z}{3t^2}\right)^2; \quad \text{ж)} \frac{(k-l)^2}{k^2-l^2};$$

$$\text{б)} \left(\frac{2x}{3n}\right)^3; \quad \text{д)} \left(-\frac{t^2 f}{2gh^2}\right)^3; \quad \text{з)} \frac{a^2-b^2}{(b+a)^2};$$

$$\text{в)} \left(\frac{3b^2}{2c^3}\right)^2; \quad \text{е)} \left(-\frac{5mn^2}{2k^3 s}\right)^3; \quad \text{и)} \frac{36-p^2}{p^4+36p^2}.$$

848. Найдите значение выражения:

$$\text{а)} \frac{c^2-25d^2}{3b-1} \cdot \frac{3ab-a}{c+5d} \text{ при } a=12, c=12, d=2;$$

$$\text{б)} \frac{(a+7)^2}{4a+12} \cdot \frac{2a+6}{a^2-49} \text{ при } a=-7; -\frac{1}{7}; \frac{1}{7}; 7.$$

849. Выполните деление (рис. 454):

$$\text{а)} 4a^2 b : \frac{8ab^2}{3cd^2}; \quad \text{ж)} \frac{-3}{4a^3 x^2} : 3ax^2;$$

$$\text{б)} \frac{6e^5 f^4}{7g^3 h^2} : (-3e^5 f^3); \quad \text{з)} 16c^2 d^3 : \left(-\frac{20c^5 d^4}{3e^2 f}\right);$$

$$\text{в)} \frac{16i^6 j^4}{17k^8 l^2} : \frac{-8i^5 j^3}{68k^4 l^5}; \quad \text{и)} \frac{18i^2 j^2}{5kl} : \frac{6ij^3}{10k^2 l^4};$$

$$\text{г)} \frac{169mn}{289p} : \frac{13p}{17mn}; \quad \text{к)} \frac{46m^3 n}{15p} : \frac{62m^2 n}{10p^3};$$

$$\text{д)} \frac{9q^5}{125r^4} : \left(-\frac{3c^5}{25r^4}\right); \quad \text{л)} 24u^2 : \frac{8u^3 v^2}{13w^3 z};$$

$$\text{е)} 144 : \left(-\frac{16}{uvw^3}\right); \quad \text{м)} \frac{16k^2 t}{7s} : \frac{10kt^3}{21z^3}.$$

Рис. 454

$$\frac{9c^5}{125d^4} : \frac{-3c^5}{5d^4} = \frac{\overset{3}{9}\overset{1}{c^5} \cdot \overset{1}{5}\overset{1}{d^4}}{\underset{25}{125}\overset{1}{d^4} \cdot \overset{(-3)}{(-3)}\overset{1}{c^5}} = -\frac{3}{25}.$$

850. Упростите выражение (рис. 455):

$$\begin{array}{ll}
 \text{а)} \frac{a+1}{b} : \frac{a^2-1}{2b^2}; & \text{ж)} \frac{m^3-n^3}{mn(n+m)} : \frac{m^2-n^2}{m^2+mn}; \\
 \text{б)} \frac{3x}{x-y} : \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}; & \text{з)} \frac{p^4-q^4}{p^2+2pq+q^2} : \frac{pq-q^2}{p+q}; \\
 \text{в)} \frac{b^2-c^2}{b^2+c^2} : \frac{5c-5b}{5c}; & \text{и)} \frac{(r-s)^2}{s^2(r+s)} : \frac{r(r+s)}{s^4}; \\
 \text{г)} \frac{ge+ef}{gh-hf} : \frac{g^2+hf}{ge-ef}; & \text{к)} \frac{u^2-v^2}{u+v} : \frac{u-v}{u^3+v^3}; \\
 \text{д)} \frac{j(i-j)}{(i+j)^2} : \frac{j^3}{(i+j)^3}; & \text{л)} \frac{w^3+z^3}{w^2-z^2} : \frac{w^2-wz}{z(w-z)}; \\
 \text{е)} \frac{k^3+l^3}{k-l} : \frac{k+l}{k^3-l^3}; & \text{м)} \frac{a^4-y^4}{a^2-2ay+y^2} : \frac{a^2-ay}{a-y}.
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{a^2+b^2-2ab-c^2}{a^2+2ab+b^2-c^2} : \frac{a-b+c}{a+b-c} = \frac{(a-b)^2-c^2}{(a+b)^2-c^2} \cdot \frac{a+b-c}{a-b+c} = \\
 & = \frac{(a-b-c)(a-b+c)(a+b-c)}{(a+b-c)(a+b+c)(a-b+c)} = \frac{a-b-c}{a+b+c}.
 \end{aligned}$$

Рис. 455

851. Выполните деление:

$$\begin{array}{ll}
 \text{а)} \frac{5a+10b}{a^2-b^2} : \frac{3a+6b}{a^2-2ab+b^2}; & \text{д)} \frac{i^2+6i+9}{3i^2j} : \frac{ki+3k}{6ij}; \\
 \text{б)} \frac{y^2+6y+9}{81-y^4} : \frac{9-y^2}{9+y^2}; & \text{е)} \frac{2mn^3}{8-8p} : \frac{2m^2n^2}{1-2p+p^2}; \\
 \text{в)} \frac{c^2+cd+d^2}{cd+2ce} : \frac{c^3-d^3}{df+2fe}; & \text{ж)} \frac{q^2+qr+r^2}{r-2} : \frac{q^3-r^3}{r^3-8}; \\
 \text{г)} \frac{9g^2-16h^2}{g^3+8} : \frac{3g+4h}{g^2-2g+4}; & \text{з)} \frac{4v^2-9}{v^2-4} : \frac{2v+3}{3v-6}.
 \end{array}$$

852. Вычислите:

$$\begin{array}{lll}
 \text{а)} \frac{1}{2} + \frac{2}{5}; & \text{в)} \frac{1}{6} + \frac{1}{21}; & \text{д)} \frac{2}{3} - \frac{1}{2}; \\
 \text{б)} \frac{5}{6} + \frac{2}{3}; & \text{г)} \frac{1}{15} + \frac{1}{12}; & \text{е)} \frac{7}{15} - \frac{1}{6}.
 \end{array}$$

853. Вычислите:

а) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}$; б) $\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3}$; в) $\frac{1}{6} : \frac{1}{21}$; г) $\frac{1}{15} : \frac{1}{12}$.

854. Сократите дробь:

а) $\frac{1 - a^2}{a^3 + 2a^2 + a}$; в) $\frac{b^2 - 8b + 16}{b^3 - 16b}$; д) $\frac{6m^2n^2 - 3m^3n}{3m^3n - 9m^2n^2}$;
 б) $\frac{x^2 + xy + y^2}{x^6 - x^3y^3}$; г) $\frac{cd^2 - 16c^3}{(d + 4c)^2}$; е) $\frac{2ij^3 + 4ij^2 + 2ij}{j^3 + 3j^2 + 3j + 1}$.

855. Найдите значение выражения $\frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2ac + a^2 - b^2 + c^2}$ при:

а) $a = 1,42$; $b = 5,58$; $c = -1,84$;

б) $a = \frac{4}{11}$; $b = \frac{2}{13}$; $c = \frac{113}{143}$.

856. На рисунке 456 приведены графики зависимостей $y = 1,2x + 1,5$ и $y = -\frac{4}{3}x + 4$. Найдите по этому рисунку координаты точки А пересечения этих

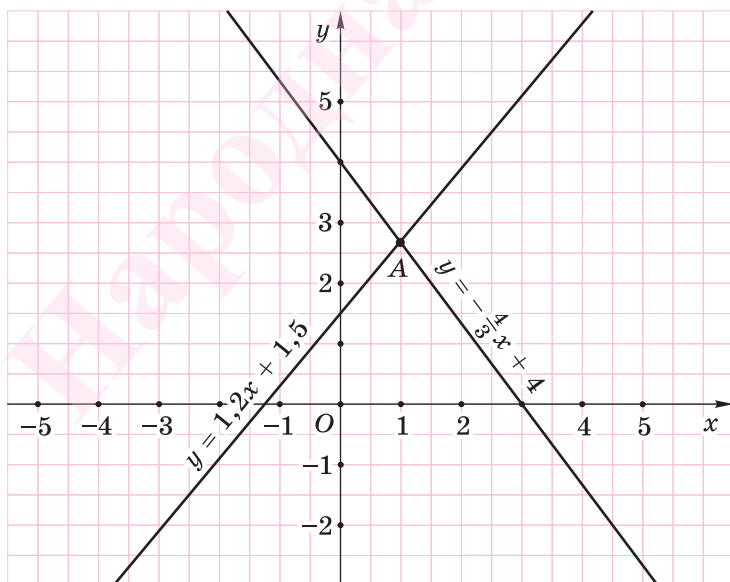


Рис. 456

графиков. Найдите абсолютную и относительную погрешности значений этих координат. Точные значения координат точки A вычислите, исходя из того, что для точки пересечения значения переменной y в обеих зависимостях одинаковы, т. е. $1,2x + 1,5 = -\frac{4}{3}x + 4$.

857. Постройте прямоугольный треугольник ABC по его катетам CA и CB , учитывая, что:

- а) $CA = 4$ см, $CB = 7$ см;
- б) $CA = 33$ мм, $CB = 56$ мм.

858. У четырехугольника $MNOP$ на рисунке 457 углы O и MNP прямые, а стороны NO , OP и PM соответственно равны 24 см, 18 см и 78 см. Найдите:

- а) периметр и площадь треугольника NOP ;
- б) периметр и площадь треугольника MNP ;
- в) периметр и площадь четырехугольника $MNOP$.

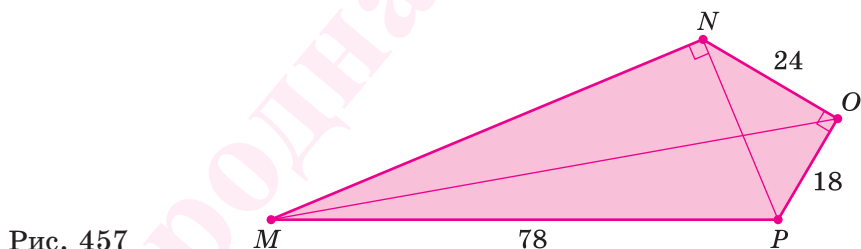


Рис. 457

859. Постройте треугольник KLM , учитывая, что:

- а) $KM = 47$ мм; $\angle K = 45^\circ$; $\angle M = 57^\circ$;
- б) $KM = 28$ мм; $\angle K = 32^\circ$; $\angle M = 95^\circ$.

860. Скорости велосипедиста и пешехода равны соответственно 15 км/ч и 5 км/ч. Велосипедист проехал на 50 км больше, чем прошел пешеход. Найдите время движения велосипедиста, если оно вдвое больше времени движения пешехода.

861. В поход купили 5 банок тушенки из свинины и 6 банок тушенки из говядины, и на это истратили 276 000 р. Найдите цену банки тушенки из свинины и цену банки тушенки из говядины, учитывая, что вместе эти цены составляют 50 000 р.

862. В поход купили тушенку из свинины по 22 500 р. за банку и тушенку из говядины по 25 000 р. за банку, и на это истратили 310 000 р. Найдите, сколько банок одной и другой тушенки купили, учитывая, что всего купили 13 банок.

* * *

863. Какое из чисел больше: 2^{300} или 3^{200} ?

864. На окружности отмечено 2000 точек синим и одна точка красным цветом. Каких многоугольников с вершинами в отмеченных точках больше — тех, среди вершин которых есть красная, или тех, все вершины которых синие?

865. Найдите все такие простые числа p , для которых число $8p^2 + 1$ также простое.

25. Рациональные выражения

Целые и дробные выражения вместе называют **рациональными выражениями** (рис. 458).

Мы знаем, что любое целое выражение можно представить многочленом стандартного вида.

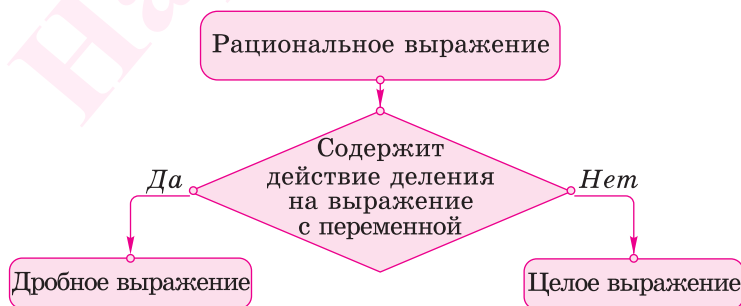


Рис. 458

Любое дробное выражение можно представить рациональной дробью или многочленом стандартного вида.

Пример 1. Упростим выражение

$$a - b - \frac{2b}{a + b} : \frac{1}{a - b}.$$

Для этого сначала выполним деление дробей, а затем полученный результат вычтем из многочлена $a - b$:

$$1) \frac{2b}{a + b} : \frac{1}{a - b} = \frac{2b(a - b)}{a + b} = \frac{2ab - 2b^2}{a + b};$$

$$2) a - b - \frac{2ab - 2b^2}{a + b} = \frac{(a - b)(a + b) - (2ab - 2b^2)}{a + b} = \\ = \frac{a^2 - b^2 - 2ab + 2b^2}{a + b} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a + b} = \frac{(a - b)^2}{a + b}.$$

В результате дробное выражение

$$a - b - \frac{2b}{a + b} : \frac{1}{a - b}$$

представлено рациональной дробью $\frac{(a - b)^2}{a + b}$.

Решение можно оформить и цепочкой равенств:

$$a - b - \frac{2b}{a + b} : \frac{1}{a - b} = a - b - \frac{2b(a - b)}{a + b} = a - b - \frac{2ab - 2b^2}{a + b} = \\ = \frac{(a - b)(a + b) - (2ab - 2b^2)}{a + b} = \\ = \frac{a^2 - b^2 - 2ab + 2b^2}{a + b} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a + b} = \frac{(a - b)^2}{a + b}.$$

Пример 2. Упростим выражение

$$(x^2 - y^2 - z^2 - 2yz) : \frac{x + y + z}{x + y - z}.$$

Будем последовательно получать:

$$(x^2 - y^2 - z^2 - 2yz) : \frac{x + y + z}{x + y - z} = \\ = (x^2 - (y^2 + z^2 + 2yz)) : \frac{x + y + z}{x + y - z} = (x^2 - (y + z)^2) \cdot \frac{x + y - z}{x + y + z} =$$

$$\begin{aligned}
 &= (x - y - z)(x + y + z) \cdot \frac{x + y - z}{x + y + z} = \\
 &= \frac{(x - y - z)(x + y + z)(x + y - z)}{x + y + z} = (x - y - z)(x + y - z) = \\
 &= ((x - z) - y)((x - z) + y) = (x - z)^2 - y^2 = \\
 &= x^2 - 2xz + z^2 - y^2 = x^2 - y^2 + z^2 - 2xz.
 \end{aligned}$$

Тождественными преобразованиями дробное выражение $(x^2 - y^2 - z^2 - 2yz) : \frac{x + y + z}{x + y - z}$ представлено многочленом $x^2 - y^2 + z^2 - 2xz$.

Пример 3. Упростим выражение

$$\frac{\frac{s^2 + t^2}{t} - s}{\frac{1}{t} - \frac{1}{s}} \cdot \frac{s^2 - t^2}{s^3 + t^3}.$$

Получим:

$$\begin{aligned}
 &\frac{\frac{s^2 + t^2}{t} - s}{\frac{1}{t} - \frac{1}{s}} \cdot \frac{s^2 - t^2}{s^3 + t^3} = \frac{\frac{s^2 + t^2 - st}{t}}{\frac{s - t}{st}} \cdot \frac{s^2 - t^2}{s^3 + t^3} = \\
 &= \frac{(s^2 + t^2 - st)st}{t(s - t)} \cdot \frac{(s - t)(s + t)}{s^3 + t^3} = \\
 &= \frac{(s^2 + t^2 - st)st(s - t)(s + t)}{t(s - t)(s^3 + t^3)} = \frac{(s^2 + t^2 - st)(s + t)s}{s^3 + t^3} = \frac{(s^3 + t^3)s}{s^3 + t^3} = s.
 \end{aligned}$$

В этом примере дробное выражение, у которого числитель и знаменатель одной дроби сами были дробями, тождественными преобразованиями мы заменили одночленом s (рис. 459).

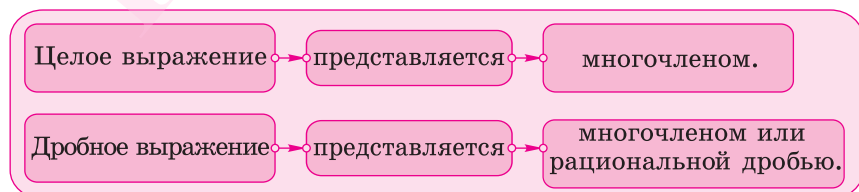


Рис. 459



1. Какое выражение называют целым; дробным; рациональным?
2. Что называют многочленом стандартного вида; рациональной дробью?
3. Какие выражения называют тождественно равными?
4. Что называют тождественным преобразованием выражения?
5. Каким выражением можно представить целое выражение?
6. Каким выражением можно представить дробное выражение?

866. Выполните действия:

- а) $\frac{m-1}{m-2} - \frac{m+1}{m+2}$;
- б) $\left(\frac{3a}{a-b} - 3\right)\left(1 - \frac{a-b}{a+b}\right)$;
- в) $\frac{r^2}{pr+r^2} \cdot \left(\frac{p+q}{p} - \frac{r-q}{r}\right)$;
- г) $\left(1 - \frac{c}{c+d}\right) : \left(1 + \frac{c}{d-c}\right)$;
- д) $\left(\frac{1}{e} + \frac{1}{f}\right) : \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{f}\right)$;
- е) $\left(\frac{y}{x-y} + \frac{x}{x+y}\right) : \frac{x^2+y^2}{xy-y^2}$;
- ж) $\frac{m+n}{n} + \frac{mn+n^2}{5} : \frac{n^3}{5m}$;
- з) $\frac{u-v}{u} - \frac{uv-u^2}{11v} \cdot \frac{11v}{u^2}$.

867. Упростите выражение:

- а) $\left(\frac{3a+1}{3a-1} - \frac{3a-1}{3a+1}\right) : \frac{12a}{21a-7}$;
- б) $\frac{b+5}{b^2+25} \cdot \left(\frac{b+5}{b-5} + \frac{b-5}{b+5}\right)$;
- в) $\left(\frac{5c+2}{c-4} + \frac{5c-2}{c+4}\right) \cdot \frac{c^2-16}{5c^2+8}$;
- г) $\left(\frac{7x+y}{x-7y} + \frac{7x-y}{x+7y}\right) : \frac{7x^2+7y^2}{2x^2-98y^2}$;

- д) $\left(1 + \frac{e}{d} + \frac{e^2}{d^2}\right) \left(1 - \frac{e}{d} + \frac{e^2}{d^2}\right);$
 е) $\left(\frac{2m}{m+n} + \frac{n-m}{m}\right) : \frac{m^2+n^2}{m+n};$
 ж) $\left(\frac{4}{3p+3q} + \frac{p}{pr+qr}\right) : \frac{16r^2+12pr}{3p^2r+3q^2r};$
 з) $\left(\frac{u-6}{u+6} + \frac{u+6}{u-6}\right) : \left(\frac{u+6}{u-6} - \frac{u-6}{u+6}\right).$

868. Упростите выражение (рис. 460):

- а) $\frac{x^2-36}{x+4} \cdot \frac{1}{x^2+6x} - \frac{x-6}{x^2-4x};$
 б) $\frac{1-2b}{3b+1} + \frac{b^2+2b}{9b^2-1} : \frac{2+b}{6b+2};$
 в) $\frac{n-p}{m+n} - \frac{mn-n^2}{m^2-mp} \cdot \frac{m^2-p^2}{m^2-n^2};$
 г) $\frac{a^3-9a}{b^2-4} : \frac{a^2-3a}{bc+2c} + \frac{3+ac}{2-b};$
 д) $\left(\frac{d^2+9}{d} - 3\right) \cdot \frac{9-d^2}{d^3+27} : \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{3}\right);$
 е) $\left(\frac{3}{u-6} + u - 2\right) : \left(\frac{6}{u-6} - 1 + u\right);$
 ж) $\left(\frac{v}{v+3} + v + 3\right) : \left(\frac{1}{3+v} - v - 3\right);$
 з) $\left(\frac{k^2+9}{k} + 3\right) \left(3 - \frac{9}{k+3}\right) : \frac{k^3-27}{9-k^2}.$

$$\begin{aligned}
 &\left(2 - \frac{1}{m+1}\right) : \left(2 - \frac{2m^2+1}{1-m^2}\right) = \\
 &= \frac{2m+2-1}{m+1} : \frac{2m^2-2+2m^2+1}{m^2-1} = \\
 &= \frac{2m+1}{m+1} : \frac{4m^2-1}{(m+1)(m-1)} = \\
 &= \frac{\overset{1}{\cancel{(2m+1)}} \overset{1}{\cancel{(m+1)}} (m-1)}{\underset{1}{\cancel{(m+1)}} \underset{1}{\cancel{(2m+1)}} (2m-1)} = \frac{m-1}{(2m-1)}.
 \end{aligned}$$

Рис. 460

869. Выполните действия (рис. 461):

- а) $\frac{a+3}{a^2-4a+4} \cdot \frac{3a-6}{a^2-9} - \frac{5}{a-3};$
- б) $\frac{x-5}{5x^2+50x+125} : \left(\frac{x}{5x-25} - \frac{x^2+25}{5x^2-125} - \frac{5}{x^2+5x} \right);$
- в) $\left(\frac{b^2-7b}{b^2-14b+49} - \frac{7b+49}{b^2-49} \right) \cdot \left(1 - \frac{7}{b} \right);$
- г) $\left(\frac{y-2}{6y+(y-2)^2} + \frac{2+5y}{y^3-8} - \frac{1}{y-2} \right) \cdot \left(1 + \frac{4}{y^2+2y} \right);$
- д) $\frac{m+1}{3m-(m+1)^2} : \left(\frac{3}{m^2-m+1} - \frac{3}{m^3+1} + \frac{1}{m+1} \right);$
- е) $\left(\frac{u^2+v^2}{u} + v \right) : \left(\left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} \right) \cdot \frac{u^3-v^3}{u^2+v^2} \right).$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{s-x}{s+x} + \frac{s+x}{s-x} + \frac{1}{\frac{s^2-x^2}{6sx-5x^2}} \right) : \left(\frac{s+x}{s-x} - \frac{1}{\frac{2sx}{s^2-x^2}} \right) = \\ & = \frac{2s^2-3sx-2sx+3x^2+2sx-3s^2+2x^2-3sx+6sx-5x^2}{s^2-x^2} : \\ & : \frac{s^2+sx-2sx}{s^2-x^2} = \frac{-s^2}{s^2-x^2} : \frac{s^2-sx}{s^2-x^2} = \\ & = \frac{-s^2 \cdot 1}{(s^2-x^2)s(s-x)} = \frac{-s}{s-x} = \frac{s}{x-s}. \end{aligned}$$

Рис. 461

870. Упростите выражение (рис. 462):

- а) $\frac{a-1+\frac{6}{a-6}}{a-2+\frac{3}{a-6}} : \frac{a-4}{a-5};$
- б) $\frac{b+2-\frac{1}{b+2}}{b+2+\frac{b}{b+2}} \cdot \frac{b+4}{b+3};$
- в) $\frac{\frac{4xy}{x^2-y^2}}{\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}};$
- г) $\frac{\frac{m^2+n^2}{m} + n}{\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} \right) \cdot \frac{m^3-n^3}{m^2+n^2}};$

$$д) \frac{3ijk}{jk+ik+ij} - \frac{\frac{i-1}{i} + \frac{j-1}{j} + \frac{k-1}{k}}{\frac{1}{i} + \frac{1}{j} + \frac{1}{k}};$$

$$е) \frac{\frac{2uv}{u+v} - u}{\frac{1}{v} + \frac{1}{u-2v}} + \frac{\frac{2uv}{u+v} - v}{\frac{1}{u} + \frac{1}{v-2u}}.$$

$$\frac{3abc}{bc+ac-ab} - \frac{\frac{a-1}{a} + \frac{b-1}{b} + \frac{c-1}{c}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}} = \frac{ab+ac+bc}{bc+ac-ab}.$$

$$1) \frac{\frac{bc}{a-1}}{a} + \frac{\frac{ac}{b-1}}{b} + \frac{\frac{ab}{c-1}}{c} = \frac{bc(a-1) + ac(b-1) + ab(c-1)}{abc} =$$

$$= \frac{abc - bc + abc - ac + abc - ab}{abc} = \frac{3abc - (ab + ac + bc)}{abc};$$

$$2) \frac{\frac{bc}{a}}{1} + \frac{\frac{ac}{b}}{1} - \frac{\frac{ab}{c}}{1} = \frac{bc+ac-ab}{abc};$$

$$3) \frac{3abc - (ab + ac + bc)}{abc} : \frac{bc+ac-ab}{abc} =$$

$$= \frac{3abc - (ab + ac + bc)}{bc+ac-ab};$$

$$4) \frac{3abc}{bc+ac-ab} - \frac{3abc - (ab + ac + bc)}{bc+ac-ab} =$$

$$= \frac{3abc - 3abc + ab + ac + bc}{bc+ac-ab} = \frac{ab+ac+bc}{bc+ac-ab}.$$

Рис. 462

871. Найдите значение выражения:

$$а) \frac{m}{m^2+n^2} - \frac{n(m-n)^2}{m^4-n^4} \text{ при } m = \frac{7}{9} \text{ и } n = \frac{5}{6}; m = -\frac{7}{9} \text{ и } n = \frac{5}{6}; m = \frac{7}{9} \text{ и } n = -\frac{5}{6}; m = -\frac{7}{9} \text{ и } n = -\frac{5}{6};$$

$$б) \frac{\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)(a^2 - b^2)}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{ab}} \text{ при } a = 17,8 \text{ и } b = -12,2; a = -17,8 \text{ и } b = -12,2; a = 17,8 \text{ и } b = 12,2;$$

319

$$\text{в)} \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} \cdot \frac{1-xy+x(x+y)}{(1-xy)^2} \text{ при } y = -17; -7; 0; 7; 17;$$

$$\text{г)} \frac{d+2-\frac{1}{d+2}}{d+2-\frac{4}{d+5}} \cdot \frac{d+4-\frac{4}{d+4}}{d+4-\frac{1}{d+4}} \text{ при } d = -1947; 458.$$

872. Сравните выражения:

- а) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}$ и $\frac{1}{2} + \frac{2}{5}$;
 б) $\frac{5}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}$ и $\left(\frac{5}{6} + \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{5}{6}$;
 в) $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}$ и $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{6}$;
 г) $\frac{7}{15} - \frac{1}{6} : \frac{5}{3}$ и $\left(\frac{7}{15} - \frac{1}{6}\right) : \frac{5}{3}$.

873. Сократите дробь:

- а) $\frac{a^3 - 2a^2 + a}{a - a^3}$; г) $\frac{(u^3 + v^3)(u^2 + uv + v^2)}{(u^3 - v^3)(u^2 - uv + v^2)}$;
 б) $\frac{xy + 1 - x - y}{y + z - 1 - yz}$; д) $\frac{z^2 - (c - d)z - cd}{z^3 + dz^2 + cz + cd}$;
 в) $\frac{m^4 - n^4}{m^2 + n^2}$; е) $\frac{(p + q)^2 - (r + s)^2}{(p + r)^2 - (q + s)^2}$.

874. Выполните действия:

- а) $\left(\frac{a^2x}{18by^2} - \frac{ax^2}{3b^2y} + \frac{x^3}{2b^3}\right) \cdot \left(-\frac{18by^2}{a^2x}\right)$;
 б) $15s\left(\frac{5}{3s} - \frac{3}{10} - \frac{s}{15}\right) - \frac{2}{3s}(6s - 3s^2 - 9s^3)$;
 в) $\frac{m}{2n}\left(\frac{3n}{4p} - \frac{4k}{5m} + \frac{3nk}{5ml}\right) - \frac{3k}{5p}\left(\frac{5m}{2k} - \frac{7p}{3n} + \frac{p}{2l}\right)$;
 г) $\frac{5u^2}{3v^2}\left(\frac{2v^2}{5u^2} - \frac{3v}{4u} - \frac{3}{25}\right) - \frac{7u}{6v}\left(\frac{4v}{7u} - \frac{3u}{5v} - \frac{9}{14}\right)$.

875. Внутри прямого угла отметили точку, расстояния которой (по перпендикулярам) от сторон равны 24 мм и 70 мм (рис. 463). Найдите расстояние от этой точки до вершины угла.

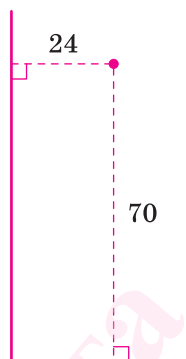


Рис. 463

876. В пластине сделаны три круглых отверстия (рис. 464). Найдите расстояния между центрами отверстий O_1 , O_2 , O_3 , учитывая, что размеры на рисунке даны в миллиметрах.

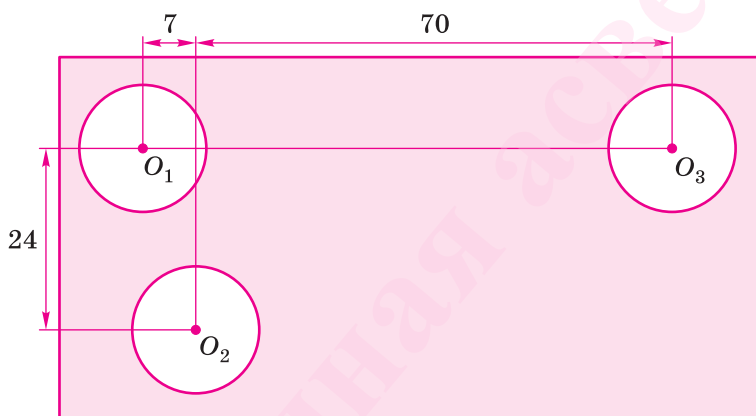


Рис. 464

877. Постройте треугольник по координатам его вершин: $A(-10; -2)$; $B(-1; 5)$; $C(2; -10)$. С помощью чертежного треугольника через вершины A и B проведите прямые, перпендикулярные противоположащим сторонам треугольника. Запишите координаты точки H пересечения этих прямых и координаты точек, в которых они пересекают оси координат и стороны треугольника.

878. На рисунке 465 показаны три прямые AB , AC , BC , попарно пересекающиеся в точках A , B , C , и четыре окружности, касающиеся каждой из этих

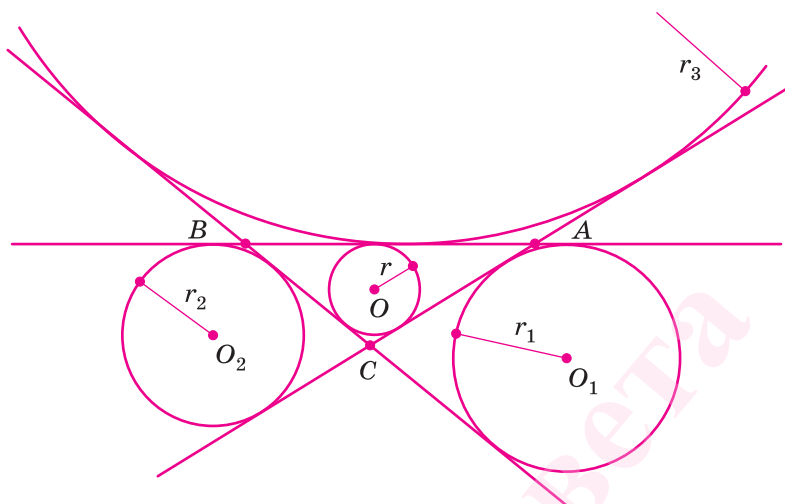


Рис. 465

трех прямых. Радиусы окружностей r, r_1, r_2, r_3 связаны формулой $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$. Выразите из этой формулы r_3 через r, r_1, r_2 . Вычислите r_3 , определив r, r_1, r_2 измерением по рисунку.

879. На двух машинах перевозили картофель, причем на первой машине перевезли картофеля в 3 раза больше, чем на второй. Грузоподъемность первой и второй машины соответственно равна 6 т и 3 т. Найдите, сколько картофеля перевезли на каждой машине, учитывая, что суммарное количество рейсов равно десяти.

880. Школа закупила на 70 000 р. грамоты по 2000 р. и дипломы по 3000 р. Найдите количества купленных грамот и дипломов в отдельности, учитывая, что грамот куплено на 10 штук больше.

881. Школа закупила 30 грамот и 20 дипломов на 110 000 р. Найдите цену грамоты и цену диплома, учитывая, что цена грамоты на 750 р. больше.

* * *

882. Найдите год, с которого известны Старые Дороги (рис. 466), зная, что он является произведением трех простых чисел, два из которых однозначные, и их произведение, увеличенное в девять раз и уменьшенное на 13, дает третий множитель.



Рис. 466

883. О натуральных числах a и b известно, что:

- 1) $a + 1$ делится на b ;
- 2) $a = 2b + 5$;
- 3) $a + b$ делится на 3;
- 4) $a + 7b$ — простое число.

Найдите все возможные пары чисел a и b , для которых три из четырех приведенных утверждений истинны, а одно — ложно.

884. Докажите, что истинно равенство:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \\ + \frac{1}{199} - \frac{1}{200} = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{200}.$$

VII

раздел

Геометрические построения

26. Построения линейкой и циркулем

А) Построения геометрических фигур мы выполняли, пользуясь линейкой с миллиметровыми делениями (рис. 467), циркулем (рис. 468), транспортиром (рис. 469), чертежным треугольником (рис. 470). В геометрии важную роль играют построения с использованием только двух инструментов — линейки и циркуля.

Геометрическая линейка односторонняя и не имеет делений (рис. 471). С ее помощью можно провести прямую, проходящую через две отмеченные точки; луч с началом в данной точке и проходящий через другую данную точку; отрезок, соединяющий данные точки. Понятно, что с помощью



Рис. 468

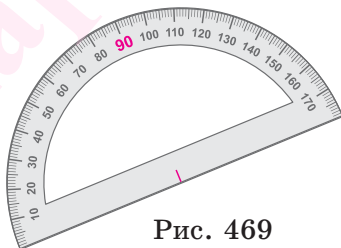


Рис. 469



Рис. 467

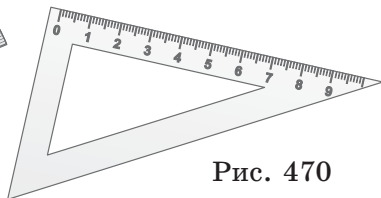


Рис. 470



Рис. 471

линейки можно провести и произвольную прямую, произвольный луч, произвольный отрезок. Для этого сначала нужно произвольно выбрать две точки. С помощью линейки можно также провести прямую через данную точку, луч с началом в данной точке, отрезок, одним из концов которого является данная точка. Другие построения геометрической линейкой невозможны. В частности, ею нельзя провести прямую, параллельную данной прямой (рис. 472), построить отрезок, равный данному (рис. 473), как мы делали это обычной линейкой.

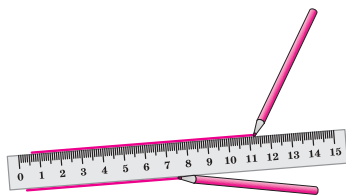


Рис. 472

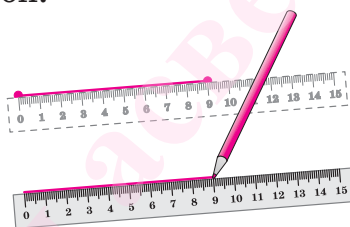


Рис. 473

С помощью **циркуля** можно, установив его раствор равным расстоянию между данными точками A и B (рис. 474), отметить две точки R и S , расстояние между которыми равно AB (рис. 475). Можно также построить окружность с центром в выбранной точке и радиусом, равным данному отрезку (рис. 476).

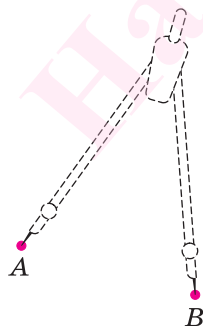


Рис. 474

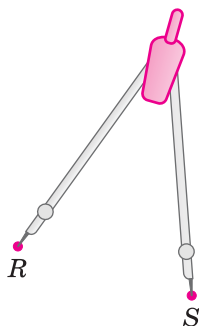


Рис. 475

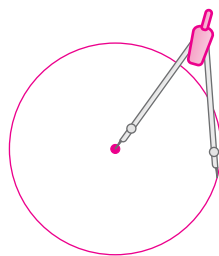


Рис. 476

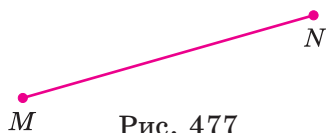


Рис. 477

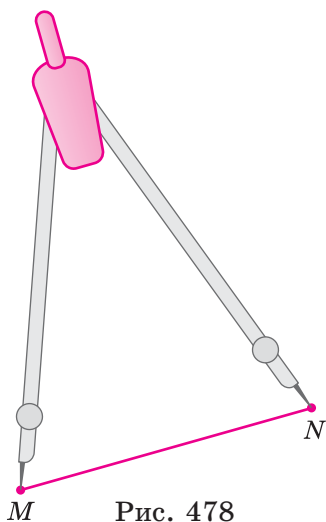


Рис. 478



Рис. 479

Это — элементарные построения, которые можно выполнить линейкой или циркулем. Их сочетание позволяет проводить более сложные построения.

Б) Задача 1. Построим отрезок, равный данному отрезку.

Пусть на плоскости дан отрезок MN (рис. 477).

Отметим произвольную точку C . Установим раствор циркуля равным расстоянию между точками M и N (рис. 478). С центром в точке C проведем дугу радиусом, равным установленному раствору. Выбрав на этой дуге произвольную точку D , с помощью линейки соединим ее с точкой C (рис. 479).

Отрезок CD — искомый отрезок, поскольку он совмещается с данным отрезком MN при наложении.

Задача 2. Построим угол, равный данному углу.

Пусть на плоскости дан угол Q (рис. 480).

Отметим произвольно точку O и проведем с помощью линейки произвольный луч OL (рис. 481). Построим дугу произвольного радиуса с центром в вершине Q данного угла так, чтобы она пересекала стороны в некоторых точках P и R (рис. 482). Проведем окружность радиусом QP с центром в точке O . Она пересекает луч OL в некоторой точке S .

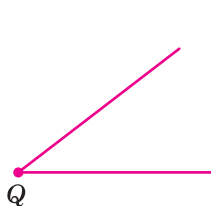


Рис. 480

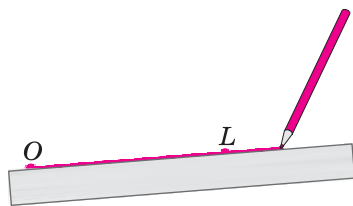


Рис. 481

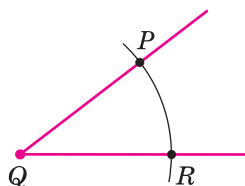


Рис. 482

Строим дугу радиусом PR с центром в точке S так, чтобы она пересекла построенную окружность с центром O в некоторой точке T (рис. 483). Наконец проведем луч OT .

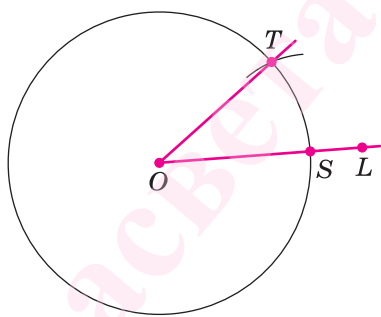


Рис. 483

Угол LOT — иско-
мый. Докажем это. В тре-
угольниках QPR и OST
их стороны OS , OT , QP , QR — равные между собой
отрезки, поскольку это радиусы равных окруж-
ностей. Отрезки ST и PR также равны по по-
строению. Значит, по третьему признаку равенства
треугольников треугольники OST и QPR равны.
А поэтому построенный угол LOT равен данному
углу PQR .

**В) Задача 3. Построим треугольник, равный
данному треугольнику.**

Пусть на плоскости задан треугольник ABC
(рис. 484).

Выбираем одну из сторон треугольника, напри-
мер AB , и строим отрезок A_1B_1 , равный этой сторо-
не (рис. 485). После этого с центрами в концах A_1 и
 B_1 строим две пересекающиеся дуги, радиусы кото-
рых равны двум другим сторонам AC и BC данного
треугольника. Точку пересечения этих дуг обозна-

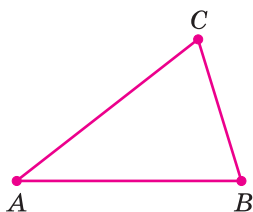


Рис. 484



Рис. 485

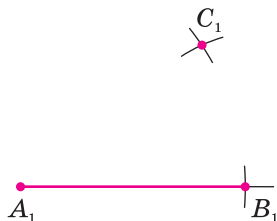


Рис. 486

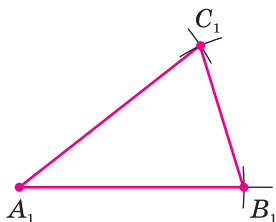


Рис. 487

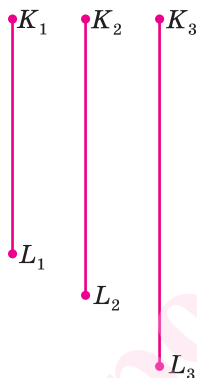


Рис. 488

чим C_1 (рис. 486). Соединим точку C_1 с точками A_1 и B_1 (рис. 487).

Треугольник $A_1B_1C_1$ — иско-
мый. Действительно, треугольни-
ки $A_1B_1C_1$ и ABC равны по треть-
ему признаку равенства треуголь-
ников.

Задача 4. Построим тре-
угольник, стороны которого
равны трем данным отрезкам.

Пусть K_1L_1 , K_2L_2 , K_3L_3 — дан-
ные отрезки (рис. 488). Построе-
ние проводится, как и при реше-
нии задачи 3.

Задача 5. Построим тре-
угольник, сторона которого
равна данному отрезку, а при-
лежащие к стороне углы равны
двум данным углам.

Пусть AB — данный отрезок,
 X и Y — данные углы (рис. 489).

Строим отрезок A_1B_1 , равный отрезку AB . Далее
строим угол со стороной A_1B_1 , равный углу X , и угол
со стороной B_1A_1 , равный углу Y . Точку пересечения
других сторон этих углов обозначим C_1 (рис. 490).

Треугольник $A_1B_1C_1$ — искомый, поскольку в
нем $A_1B_1 = AB$, $\angle C_1A_1B_1 = \angle X$, $\angle C_1B_1A_1 = \angle Y$ по по-
строению.

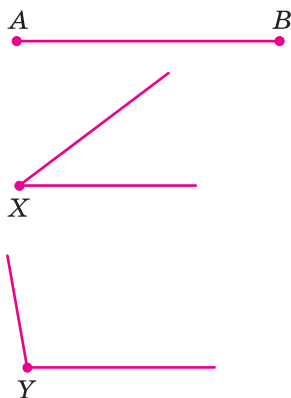


Рис. 489

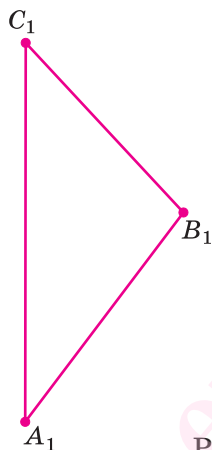


Рис. 490

Задача 6. Построим треугольник, две стороны которого равны двум данным отрезкам, а угол между ними равен данному углу.

Пусть F — данный угол, K_1L_1 и K_2L_2 — данные отрезки (рис. 491).

Строим угол F_1 , равный углу F , и от вершины F на одной его стороне откладываем отрезок F_1E_1 , равный отрезку K_1L_1 , а на другой — отрезок F_1G_1 , равный отрезку K_2L_2 (рис. 492).

Треугольник $E_1F_1G_1$ — искомый, поскольку в нем $\angle E_1F_1G_1 = \angle F$, $F_1E_1 = K_1L_1$, $F_1G_1 = K_2L_2$ по построению.

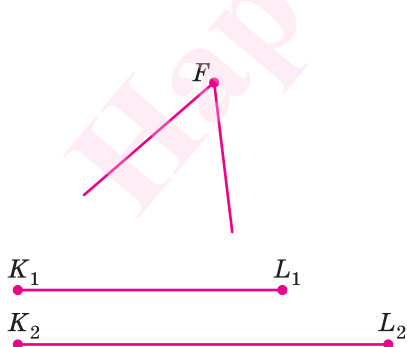


Рис. 491

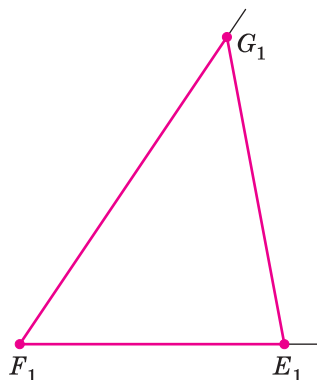


Рис. 492



1. Какие построения можно выполнить геометрической линейкой?
2. Какие построения можно выполнить циркулем?
3. Как построить отрезок, равный данному отрезку?
4. Как построить угол, равный данному углу?
5. Как построить треугольник, равный данному треугольнику?
6. Как построить треугольник, стороны которого равны трем данным отрезкам?
7. Как построить треугольник, сторона которого равна данному отрезку, а прилежащие к стороне углы — двум данным углам?
8. Как построить треугольник, две стороны которого равны двум данным отрезкам, а угол между ними равен данному углу?

885. Постройте в тетради произвольную прямую l . Отметьте на прямой l произвольную точку M . Проведите луч с началом в точке M .

886. Отметьте в тетради две точки A и B . Постройте в тетради отрезок с концами в точках A и B .

887. Отметьте в тетради две точки M и N . Отметьте еще одну точку S . Постройте луч с началом в точке S . Найдите на этом луче точку T , расстояние от которой до точки S равно расстоянию между точками M и N .

888. Отметьте в тетради две точки P и Q . Отметьте еще одну точку O . Постройте окружность с центром в точке O , радиус которой равен отрезку PQ .

889. Постройте в тетради произвольную окружность. Постройте вторую окружность, которая бы пересекала первую.

890. Постройте в тетради окружность. Постройте прямую, которая бы не пересекала окружность. Постройте окружность, которая бы пересекала построенные окружность и прямую.

891. Постройте в тетради произвольный:

- а) отрезок и затем постройте отрезок, равный ему;
- б) угол и затем постройте угол, равный ему;
- в) треугольник и затем постройте треугольник, равный ему.

892. Постройте в тетради произвольные:

- а) три отрезка и затем постройте треугольник, стороны которого равны этим отрезкам;
- б) отрезок и два угла и затем постройте треугольник, одна сторона которого и прилежащие к ней углы равны этим отрезку и двум углам;
- в) два отрезка и угол и затем постройте треугольник, две стороны которого и угол между ними равны этим двум отрезкам и углу.

893. Постройте в тетради два отрезка, один из которых визуально:

- а) меньше половины другого отрезка, и затем постройте равнобедренный треугольник, стороны которого равны этим отрезкам;
- б) больше половины другого отрезка, и затем постройте равнобедренный треугольник, стороны которого равны этим отрезкам.

894. Постройте в тетради произвольный:

- а) отрезок и затем постройте отрезок, который больше его в 2 раза;
- б) угол и затем постройте угол, который больше его в 2 раза.

895. Постройте в тетради произвольные:

- а) два отрезка и затем постройте прямоугольный треугольник, у которого катеты равны этим отрезкам;
- б) отрезок и острый угол и затем постройте прямоугольный треугольник, у которого катет и острый угол равны этому отрезку и углу.

896. Постройте в тетради произвольные:

- а) отрезок и острый угол и затем постройте равнобедренный треугольник, у которого основание и угол при нем равны этому отрезку и углу;
б) отрезок и тупой угол и затем постройте равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона и угол между боковыми сторонами равны этому отрезку и углу.

897. Вычислите:

- а) $14 \cdot 1,5$; в) $24 \cdot 2,25$;
б) $140 \cdot 2,1$; г) $232 \cdot 3,125$.

898. Вычислите:

- а) $\frac{6^4 \cdot 36^2}{6^7}$; в) $\frac{4^6 \cdot 3^7}{6^8}$;
б) $\frac{3^5 \cdot 27}{9^9}$; г) $\frac{15^7}{10^6 \cdot 6^5}$.

899. Упростите выражение:

- а) $4\frac{3}{7}x - \left(2\frac{1}{6} + 3\frac{6}{7}x\right) - \frac{7}{12}$;
б) $4,1y - (12,3 - 7,2y + 0,7)$;
в) $1\frac{1}{3}z + \left(\frac{5}{6} - 0,5z\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}z\right)$;
г) $5(2,9a + 1,3) - 2(7,7 - 4,5a)$.

900. Приведите подобные члены:

- а) $\frac{1}{4}w^5 + \frac{1}{32}w^5 - \frac{1}{16}w^5 + \frac{1}{2}w^5$;
б) $\frac{2}{3}x^3z - \frac{1}{6}x^3z + \frac{7}{9}x^3z - \frac{5}{12}x^3z$;
в) $\frac{3}{4}i^2l^4 - \frac{5}{6}i^2l^4 + \frac{1}{2}i^2l^4 - \frac{7}{12}i^2l^4$;
г) $\frac{1}{5}gh^6 - \frac{1}{30}gh^6 + \frac{3}{10}gh^6 - \frac{7}{15}gh^6$.

901. Выполните умножение многочленов:

- а) $(2a + x)(a^2 + x^2)(a - 0,5x)$; г) $(d + 3)^2(d - 3)^2$;
б) $(2p - q + 3r)(2p + q - 3r)$; д) $(u + v)(u - v)^2$;
в) $(m^2 - m + 1)(m^2 + m + 1)$; е) $(f + g + h)^2$.

902. Решите уравнение:

- а) $(2a - 3)^2 - 2a(7 + 2a) = 78$;
б) $(6x - 4)(4 + 6x) - 3x(12x - 1) = 0$;
в) $(7b - 6)^2 - (12 + 7b)^2 = -18$;
г) $(5s + 3)^2 - 17 = (6 - 5s)^2 + 28$.

903. Решите уравнение:

- а) $3b - \frac{2b + 3}{6} = \frac{3b - 5}{7} - 6,5$; г) $2,1 = \frac{4s - 1}{3} \cdot 1,5$;
б) $3 + \frac{x - 2}{6} = 2x - \frac{3x + 1}{7}$; д) $d - 2,4 = \frac{5d - 3}{9} \cdot 2,7$;
в) $3a - \frac{a + 1}{3} = \frac{a}{2} + 5$; е) $\frac{7u - 5}{11} \cdot 0,7 = u + 1,9$.

904. Разложите на множители:

- а) $5a^2bc + 4ab^2c - 3abc^2$;
б) $12xy^2 - 6x^2y - 18x^2y^2$;
в) $24m^3n + 16mn^3 - 32m^2n^2$;
г) $3(a - x) - a(a - x) - (a - x)$;
д) $-21i^2j^3k^4 - 35i^4j^3k^2$;
е) $33b^4c^3d^4 - 77b^3c^4d^2$;
ж) $1,2f^2g^5 + 0,4f^3g^3$;
з) $5,2u^2(v - 3)^2 - 1,3u^2(v - 3)$.

905. Плотность ρ вещества, из которого состоит тело, выражается через его массу m и объем V формулой $\rho = \frac{m}{V}$. Выразите из этой формулы:

- а) переменную m через переменные ρ и V ;
б) переменную V через переменные ρ и m .

906. Найдите плотность:

а) меди, учитывая, что масса медного кубика с ребром 4 см 571 г;

б) олова, учитывая, что масса оловянного шарика радиусом 9 мм 17,6 г. Объем шара вычисляется по формуле $V = \frac{4}{3} \pi r^3$, где r — радиус шара.

907. Упростите выражение:

$$\text{а) } \frac{b-a-\frac{16a^2}{b-a}}{b-a+\frac{4a^2}{b-6a}};$$

$$\text{в) } \frac{\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{2}{p+q} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right)}{\frac{(p+q)^2}{pq}};$$

$$\text{б) } \frac{\frac{u^2+v^2}{v} - u}{\frac{1}{v} - \frac{1}{u}} \cdot \frac{u^2-v^2}{u^3+v^3};$$

$$\text{г) } \frac{c + \frac{1}{d}}{c + \frac{e}{de+1}} - \frac{1}{d(cde+c+e)}.$$

908. Рациональной дробью представьте выражение:

$$\text{а) } \left(\frac{a-b}{ab} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right) : \left(\frac{a^2+b^2}{ab} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \right);$$

$$\text{б) } \left(c - 2 + \frac{1}{c} \right) : \left(c^2 - c - 1 + \frac{1}{c} \right);$$

$$\text{в) } \left(\frac{m^2+n^2}{mn} - \frac{m^2}{mn+n^2} - \frac{n^2}{m^2+mn} \right) : \frac{3}{mn};$$

$$\text{г) } \left(\frac{p^2+pq}{2q} : (p^2-q^2) \right) \left(\frac{(p+q)^2}{4pq} - 1 \right).$$

909. Упростите выражение:

$$\text{а) } \frac{1}{(a-b)(b-c)} - \frac{1}{(a-c)(b-c)} - \frac{1}{(b-a)(c-a)};$$

$$\text{б) } \frac{3}{(p-q)(r-q)} + \frac{4}{(p-r)(q-r)} - \frac{3}{(p-r)(q-p)};$$

$$\text{в) } \frac{1}{u(u-v)(u-w)} + \frac{1}{v(v-u)(v-w)} + \frac{1}{w(w-u)(w-v)};$$

$$\text{г) } \frac{i}{(i-2j)(i-k)} + \frac{2j}{(2j-k)(2j-i)} + \frac{k}{(k-i)(k-2j)}.$$

$$\text{д) } \frac{3x+2y}{3x+y} - \frac{3y-2z}{3y-z} - \frac{z(3x+y)}{3y^2+9xy-3xz-yz};$$

$$\text{е) } \frac{m(k-n)}{m^2+kn-mn-km} + \frac{m-2n}{n-m} + \frac{m+3k}{m-k}.$$

910. Постройте треугольник EFG по двум сторонам EF и FG и углу EFG между ними, учитывая, что:

- а) $EF = 5$ см, $FG = 7,5$ см; $\angle EFG = 56^\circ$;
 б) $EF = 38$ мм, $FG = 45$ мм; $\angle EFG = 115^\circ$.

911. Постройте прямоугольный треугольник ABC по его катетам CA и CB , учитывая, что:

- а) $CA = 48$ мм, $CB = 65$ мм;
 б) $CA = 48$ мм, $CB = 55$ мм.

912. На рисунке 493 показан один из приемов построения параллельных прямых при помощи рейсшины. Как обосновать, что прямые AB и CD параллельны?

913. Углы M и N треугольника OMN на рисунке 494 соответственно равны 25° и 70° . Через точку A на стороне MN провели прямую, параллельную MO , которая пересекла сторону ON в точке B . Найдите углы треугольника ANB и четырехугольника $MABO$.

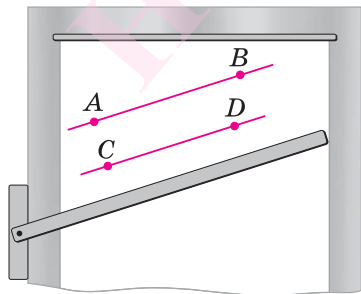


Рис. 493

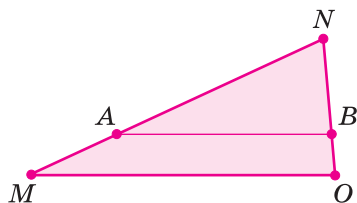


Рис. 494

914. Сельскохозяйственные угодья Молодечненского района занимают 53,2 % его площади. Их почвы: дерново-подзолистые — 57,6 %, торфяно-болотные — 18,1 %, дерново-подзолистые заболоченные — 14,4 %. Остальную площадь занимают другие почвы. Определите с точностью до квадратного километра площади дерново-подзолистых, торфяно-болотных, дерново-подзолистых заболоченных и других почв Молодечненского района, учитывая, что район занимает площадь в 1,4 тыс. км². Постройте соответствующую круговую диаграмму.

915. Еленка, Ольшовка, Жадунька — притоки Беседи, протекающие по Хотимскому району. Площадь водосбора Ольшовки относится к площади водосбора Жадуньки как 41 : 122, а к площади водосбора Еленки — как 82 : 51. Найдите площади водосборов этих рек, учитывая, что площадь водосбора Жадуньки на 386 км² больше площади водосбора Еленки.

916. Река Дива вытекает из озера Урода, протекает через озера Отолово, Туроссы, Березовское, Паульское и впадает в озеро Яново (рис. 495). Эти озера — часть Ушачской группы озер. Площадь озера Отолово относится к площади озера Туроссы как 410 : 37, а общая их площадь равна 8,94 км². Найдите по отдельности площади озер Урода, Отолово, Туроссы, учитывая, что отношение площадей Уроды

и Отолово равно $\frac{38}{205}$.



Рис. 495

917. Купили два куска ткани одинаковой длины, причем за первый кусок уплатили 840 000 р., а за второй — на 240 000 р. меньше. Найдите цену 1 м ткани из первого и второго кусков, учитывая, что они в сумме дают 120 000 р.

918. Над заказом работали две бригады, производительность первой бригады — 55 деталей в час, производительность второй — 50 деталей в час. Первая бригада изготовила на 70 деталей больше. Учтя, что время работы первой бригады вместе со временем работы второй бригады составляют 7 ч, найдите время работы каждой бригады.

919. Над заказом работали две бригады, время работы первой бригады 5 ч, а время работы второй — 3 ч. Первая бригада изготовила на 155 деталей больше. Учтя, что производительность первой бригады вместе с производительностью второй бригады составляет 135 деталей в час, найдите производительность каждой бригады.

* * *

920. Расшифруйте арифметический ребус

$$\text{ОДИН} + \text{ОДИН} = \text{МНОГО},$$

в котором одинаковые цифры заменены одинаковыми буквами, а разные — разными.

921. От квадрата отрезали прямоугольный треугольник, сумма катетов которого равна стороне квадрата. Докажите, что углы, под которыми из трех остальных вершин квадрата видна линия разреза (рис. 496), в сумме составляют 90° .

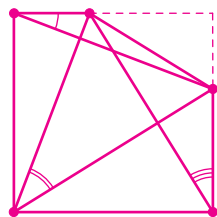


Рис. 496

922. Определите, делятся ли на 2007 разность и сумма произведений

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2002 \cdot 2004 \cdot 2006$$
$$\text{и } 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2001 \cdot 2003 \cdot 2005.$$

27. Основные задачи на построение

А) Решить задачу на построение означает свести ее к последовательному выполнению элементарных построений, которые можно выполнить циркулем или геометрической линейкой. Вместе с этим сведение решения каждой задачи к элементарным построениям нерационально. Обычно построение нужной фигуры сводят к так называемым *основным построениям*, часть которых мы уже рассмотрели в параграфе 26. Теперь опишем другие основные построения.

Задача 7. Построим середину данного отрезка.

Пусть AB — данный отрезок. Радиусом, большим половины отрезка AB , начертим две пересекающиеся дуги с центрами в точках A и B . Пусть P и Q — точки пересечения этих дуг, а M — точка, в которой отрезок PQ пересекает отрезок AB (рис. 497). Точка M — искомая середина отрезка AB . Докажем это.

Треугольники PAQ и PBQ равны по третьему признаку, поскольку $AP = BP$, $AQ = BQ$ по построению, а PQ — общая сторона. Значит, углы APM и BPM равны, а поэтому PM — биссектриса равнобедренного треугольника APB . По соответствующему свойству равнобедренного треугольника биссектриса PM является и медианой. Поэтому точка M является серединой отрезка AB .

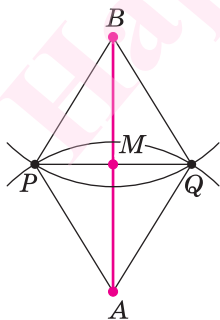


Рис. 497

Задача 8. Построим биссектрису данного угла.

Пусть MON — данный угол. На его сторонах от вершины O отложим равные отрезки OR и OS . Начертим две пересекающиеся дуги одного радиуса с центрами в точках R и S . Пусть T — точка пересечения этих дуг (рис. 498). Луч OT — искомая биссектриса.

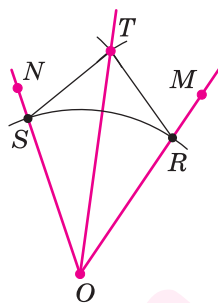


Рис. 498

Действительно, треугольники ORT и OST равны по третьему признаку равенства треугольников, а значит, равны и их соответствующие углы ROT и SOT .

Б) Задача 9. Построим прямую, проходящую через данную точку перпендикулярно данной прямой.

Пусть l — данная прямая и C — данная на ней точка. На прямой l от точки C отложим равные отрезки CD и CE . Начертим две пересекающиеся дуги одного радиуса с центрами в точках D и E . Пусть N — точка пересечения этих дуг (рис. 499). Прямая CN — искомая прямая.

Действительно, в соответствии с построением отрезок NC является медианой равнобедренного треугольника DNE . А по соответствующему свойству равнобедренного треугольника эта медиана является и высотой. Значит, прямая NC проходит через точку C прямой l и перпендикулярна этой прямой.

Пусть l — данная прямая и G — данная точка, которая не лежит на прямой l . С центром в точке G проведем дугу так, чтобы она пересекала прямую l в двух точках U

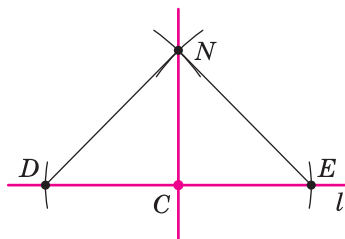


Рис. 499

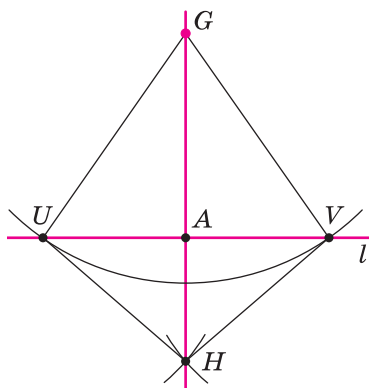


Рис. 500

и V (рис. 500). С центрами в точках U и V начертим две пересекающиеся дуги одного радиуса. Пусть H — точка пересечения этих дуг. Прямая GH — искомая прямая.

Докажем это. Пусть A — точка, в которой прямая GH пересекает прямую l . Треугольники GUH и GVH

равны по третьему признаку равенства треугольников. Поэтому их соответствующие углы UGA и VGA равны. Значит, отрезок GA — биссектриса равнобедренного треугольника UGV . Тогда этот отрезок является и высотой этого треугольника.

Таким образом, прямая GH проходит через точку G и перпендикулярна прямой l .

Задача 10. Построим прямую, проходящую через данную точку и параллельную данной прямой.

Пусть k — данная прямая и M — данная точка, не лежащая на прямой k . Через точку M проводим прямую p , перпендикулярную прямой k , и затем прямую q , перпендикулярную прямой p (рис. 501). Прямая q — искомая прямая.

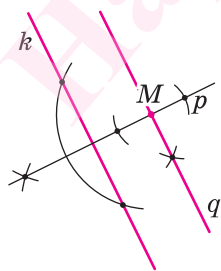


Рис. 501

Действительно, сумма внутренних односторонних углов при пересечении прямых k и q прямой p , как сумма двух прямых углов, равна 180° , поэтому по соответствующему признаку параллельности прямые k и q параллельны.

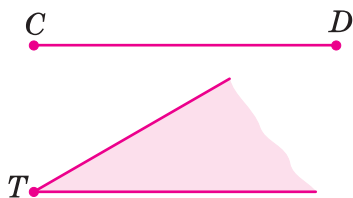


Рис. 502

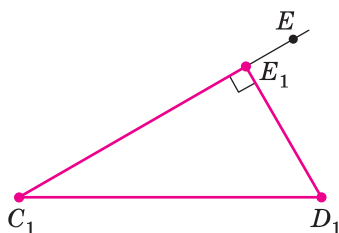


Рис. 503

В) Задача 11. Построим прямоугольный треугольник по гипотенузе и острому углу.

Пусть дан отрезок CD и острый угол T (рис. 502). Отложим отрезок C_1D_1 , равный отрезку CD . Строим угол D_1C_1E , равный углу T . Из точки D_1 опустим перпендикуляр D_1E_1 на прямую C_1E (рис. 503). Треугольник $C_1D_1E_1$ — искомый.

Действительно, по построению треугольник $C_1D_1E_1$ — прямоугольный, а его гипотенуза C_1D_1 и угол $D_1C_1E_1$ соответственно равны данному отрезку CD и углу T .

Задача 12. Построим прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету.

Пусть даны отрезки KL и MN , первому из которых должна быть равна гипотенуза, а второму — катет искомого прямоугольного треугольника (рис. 504). Построим прямой угол M_1 . От вершины M_1 на одном из лучей этого угла отложим отрезок M_1N_1 , равный отрезку MN . Наконец с центром в точке N_1 проведем дугу радиусом, равным KL , которая пересекает вторую сторону прямого угла в точке L_1 (рис. 505). Треугольник $M_1L_1N_1$ — искомый.



Рис. 504

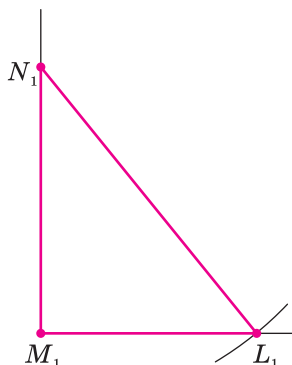


Рис. 505

Действительно, по построению треугольник $M_1L_1N_1$ прямоугольный, а его катет M_1N_1 и гипотенуза N_1L_1 соответственно равны данным отрезкам MN и KL .



1. Как построить середину данного отрезка?
2. Как построить биссектрису угла?
3. Как построить прямую, проходящую через данную точку данной прямой и перпендикулярную этой прямой?
4. Как построить прямую, проходящую через данную точку, не принадлежащую данной прямой, и перпендикулярную этой прямой?
5. Как построить прямую, проходящую через данную точку и параллельную данной прямой?
6. Как построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и острому углу?
7. Как построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету?
8. Как построить прямую, которая проходит через данную точку и касается данной окружности?

923. Постройте произвольный отрезок и затем постройте на нем точку, которая делит этот отрезок в отношении:

- а) $1 : 1$; в) $1 : 7$;
б) $1 : 3$; г) $3 : 5$.

924. Постройте произвольный угол ABC и затем постройте луч с началом в точке B , который делит угол ABC в отношении:

- а) $1 : 1$; в) $1 : 7$;
б) $1 : 3$; г) $3 : 5$.

925. Постройте угол, величина которого равна:
а) 60° ; б) 30° ; в) 15° ; г) 75° .

926. Постройте произвольную прямую m и отрезок CD , а затем точку B , отстоящую от прямой m на отрезок CD . Через точку B проведите прямую, параллельную прямой m .

927. Постройте произвольный треугольник IJK . Через его вершины проведите прямые, параллельные сторонам треугольника IJK . Сравните углы треугольника, образованного построенными прямыми, и треугольника IJK .

928. Проведите произвольную прямую l и выберите на ней произвольно точку C . Постройте прямую, проходящую через точку C перпендикулярно к прямой l .

929. Постройте произвольный отрезок RS и через его концы R и S проведите прямые u и t , перпендикулярные RS . Каким отношением связаны прямые u и t ?

930. Постройте треугольник и проведите его высоты, учитывая, что этот треугольник:

- а) остроугольный; в) тупоугольный.
- б) прямоугольный;

931. Постройте произвольный отрезок KL , а затем постройте отрезок PQ , равный отрезку KL . Найдите середину A отрезка PQ . Через точку A проведите прямую k , перпендикулярную прямой PQ . На прямой k найдите точку B , отстоящую от точки Q на отрезок KL . Найдите углы треугольника ABQ .

932. Постройте произвольный треугольник и проведите его:

- а) медианы; б) биссектрисы.

933. Постройте произвольный отрезок и острый угол, а затем постройте прямоугольный треугольник, гипотенуза и острый угол которого равны этому отрезку и углу.

934. Постройте два произвольных отрезка, а затем прямоугольный треугольник, гипотенуза и катет которого равны этим отрезкам.

935. На сторонах угла ABC отложены равные отрезки BM и BN и затем также равные отрезки MP и

NQ . Прямые MQ и NP пересекаются в точке O . Докажите, что луч BO — биссектриса. Используя эту задачу, опишите способ построения биссектрисы угла.

936. Постройте два произвольных отрезка и третий отрезок, который меньше каждого из них. Затем постройте треугольник, две стороны которого равны двум первым отрезкам и:

а) высота, проведенная к третьей стороне, равна третьему отрезку (рис. 506);

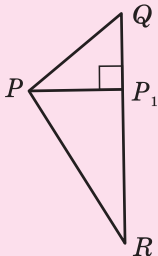
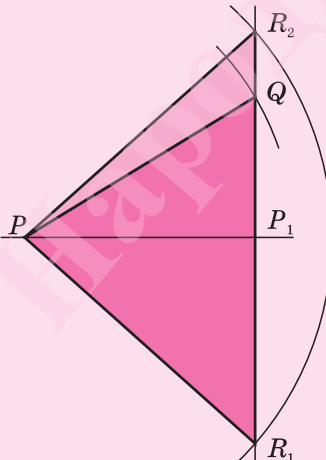
$\begin{array}{ccc} A & & B \\ \hline C & & D \\ \hline E & & F \\ \hline \end{array}$	<u>Дано: отрезки AB, CD, EF.</u> <u>Построить: $\triangle PQR$, у которого</u> $PQ = AB, PR = CD, PP_1 = EF$, PP_1 — высота.
	Допустим, что искомым треугольником построен и PP_1 — высота. $\triangle PQP_1$: 1) $\angle P_1 = 90^\circ$; 2) $PP_1 = EF$ — катет; 3) $PQ = AB$ — гипотенуза. $\triangle PRP_1$: 1) $\angle P_1 = 90^\circ$; 2) $PP_1 = EF$ — катет; 3) $PR = CD$ — гипотенуза.
	Строим: 1. $\triangle PQP_1$, у которого $\angle PP_1Q = 90^\circ, PP_1 = EF$ и $PQ = AB$. 2. Окружность $O(P, CD)$ с центром P и радиусом, равным CD. 3. Точки R_1 и R_2 — точки пересечения $O(P, CD)$ с QP_1. $\triangle PQR_1$ и $\triangle PQR_2$ — искомые, так как $PQ = AB, PR_1 = PR_2 = CD, PP_1 = EF$ и PP_1 — высота. Если $EF < AB, EF < CD$ и $AB = CD$, то задача имеет два решения. Если $EF = AB < CD$ или $EF = CD < AB$, или $EF = AB < CD$, то задача имеет одно решение. Если $EF > AB$ или $EF > CD$, то задача не имеет решений.

Рис. 506

б) биссектриса, проведенная к третьей стороне, равна третьему отрезку.

937. Начертите дугу CD окружности. Поделите дугу CD пополам.

938. Найдите значение выражения:

- а) $\frac{5 \cdot 21^5}{3^3 \cdot 7^5 \cdot 27}$; г) $\frac{10^4 \cdot 3^5}{15^4}$; ж) $\frac{15^5 \cdot 7}{3^5 \cdot 5^5 \cdot 25}$;
 б) $\frac{3^9 \cdot (5^2)^5}{15^8}$; д) $\frac{81 \cdot 27^4}{3^{13}}$; з) $\frac{7^7 \cdot 11^5 \cdot 121}{77^5 \cdot 7^2}$.
 в) $\frac{4^{15}}{8^4}$; е) $\frac{(2^3)^4 \cdot 2^7}{(2^5)^3}$;

939. Представьте степенью произведение:

- а) $7^7 m^7 n^7$; г) $(-2,5)^2 a^2 b^2$; ж) $\frac{16}{81} v^2 w^2$;
 б) $2,8^4 u^4 v^4$; д) $81 p^2 r^2$; з) $0,0016 e^4 f^4$;
 в) $\left(\frac{4}{15}\right)^3 r^3 t^3$; е) $81 k^4 l^4$; и) $-0,027 i^3 j^3$.

940. Учтывая, что $2^6 = 64$, а $2^{10} = 1024$, вычислите:

- а) $2^{11} : 2^5$; в) 4^5 ; д) $2^{11} : 16$;
 б) $2^{10} : 2^5$; г) $64 \cdot 32$; е) $(2^6)^2$.

941. Учтывая, что $a^3 = 3$, найдите (рис. 507):

- а) a^6 ; б) a^9 ; в) a^{12} ; г) a^{15} ; д) a^{21} .

Рис. 507

$$a^{30} = (a^3)^{10} = 3^{10} = 59\,079.$$

942. Докажите тождество:

- а) $4(1-a)^2 - 5(1-a)(1+a) - (3+a)^2 = 2(4a^2 - 7a - 5)$;
 б) $(x-2y)(4y+2x) + 2y(x+2y) - 2y(x-2y) = 2x^2$.

943. Рассмотрите тождество $5x^3 + 4x^2 - 2x + 3 = ((5 \cdot x + 4) \cdot x - 2) \cdot x + 3$. Обобщите записанное тождество.

дество. Расскажите, как можно организовать свои действия при вычислении значения многочлена. Найдите значение многочлена:

- а) $2x^4 - 15x^3 + 40x^2 - 45x + 18$ при x , равном: -2 ; -1 ; $-\frac{1}{2}$; 0 ; 1 ; $\frac{3}{2}$; 2 ; 3 ;
- б) $a^5 - a^4 - 13a^3 + 13a^2 + 36a - 36$ при a , равном -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; $\frac{1}{3}$.

944. Решите уравнение:

- а) $5,9z - 7,64 = -4z + 15,13$;
- б) $5,8a + 14 = 14 - 15,9a$;
- в) $3,4s - 9,7 - 0,8s = 2,6s - 19$;
- г) $7,6 - 4,7f - 1,2 + 1,1f = 6,4 - 3,6f$.

945. Решите уравнение:

- а) $(a + 2)(a^2 - 2a + 4) - a(a + 3)(a - 3) = 53$;
- б) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9) - x(x - 5)(x + 5) = 48$;
- в) $(3b + 1)(9b^2 - 3b + 1) - 9b(3b^2 - 5) = 136$;
- г) $(2u - 3)(4u^2 + 6u + 9) - 4u(2u^2 - 11) = 226$.

946. Представьте многочленом выражение:

- а) $(i^4 + i^3j + i^2j^2 + ij^3 + j^4)(i - j)$;
- б) $(i^4 - i^3j + i^2j^2 - ij^3 + j^4)(i + j)$.

947. Вынесите за скобки общий множитель:

а) $c^2(x - y) - (x - y)$;	ж) $(e + 2)^2 - e(e + 2)$;
б) $(c + d) + x^3(c + d)$;	з) $-4z(x - 3) + 8(3 - x)^2$;
в) $3s(m + n) + t(m + n)$;	и) $a(c - d) + b(c - d)$;
г) $k(m - n) - (m - n)$;	к) $i(j - 3) - j(3 - j)$;
д) $(d + 5) - x(d + 5)$;	л) $4k(3y - 4) + 5l(4 - 3y)$;
е) $11(q - 1) + (q - 1)^2$;	м) $(u - v)^2 - w(v - u)$.

948. Решите уравнение:

- а) $(a + 2)^3 + (a - 2)^3 - 2a^3 = -48$;
- б) $(z + 3)^3 - (z - 3)^3 - 6z(3z - 1) = 0$;

- в) $3c(c-1)^2 - 3(c+1)^3 + 3\frac{3}{4}(1+2c)(2c-1) + c = 1$;
 г) $(2x-3)^3 + (5+6x)(5-6x) - 8x(x^2-9x) = 52$;
 д) $(y+3)^3 - y^2(y+9) = 18$;
 е) $(2u-1)^3 + (3-2u)4u^2 = 5$;
 ж) $(4m+5)(4m-5)4m + (3-4m)^3 - (12m-5)^2 = 24$;
 з) $(1+d)^3 + (1-d)^3 - 10d(1,2+0,6d) = 6$;
 и) $(3k-4)^3 + 27k^2(4-k) = 8$.

949. Упростите выражение:

- а) $4(a-b)^2 + 4a(a-b)$; в) $(m+7)^2 - 2(m+3)(m+10)$;
 б) $(6+3y)^2 - 9y(4+y)$; г) $(u-4)(5+7u) - 8(1-u)^2$.

950. Запишите многочленом выражение:

- а) $x(1-3x)^2 - (x^2-2)(2-x) + 3x^3(4x-1)$;
 б) $(c^2-2c)^2 - c(5-c)(c+4) - 4c(2c^3-5)$;
 в) $(y-a)^3(y-a) - (y-a)^2(ay+a^2)$;
 г) $(b^2-b+1)(b^2+b+1)(b^4-b^2+1)$;
 д) $(i+j+k)(i+j-k)(i-j+k)(i-j-k)$;
 е) $(2+u^2+3u^3+v^2)(2+u^2-3u^3-v^2)$.

951. Найдите значение выражения:

- а) $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$ при $(a; b) = (-3; 2), (-1,7; -2,3), \left(-1\frac{4}{7}; 5\frac{11}{14}\right)$;
 б) $\frac{(x+y)^2 - (xy+1)^2}{xy-1-x+y}$ при $(x; y) = (-1; 2), (-0,1; -0,2), \left(1\frac{4}{7}; -1\frac{7}{27}\right)$.

952. Рациональной дробью представьте выражение:

- а) $(a^{-3} + b^{-5}) : (a^{-3} - b^{-5})$; в) $(x^{-k} + y^{-k}) : (x^{-l} - y^{-l})$;
 б) $(c^{-2m} - d^{-2m}) : (c^{-m} + d^{-m})$; г) $(u^{-3t} - v^{-3t}) : (u^{-t} - v^{-t})$.

953. Рациональной дробью представьте выражение:

- а) $((a-b)(a+b)^{-1} - (a+b)(b-a)^{-1}) \cdot 4^{-1}a^{-1}b^{-1}$;
 б) $(x-y^2(x-y)^{-1})(x^2(x-y)^{-1}-y)^{-1}$.

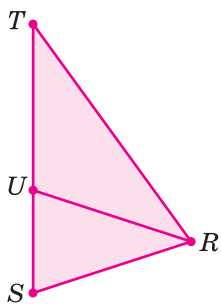


Рис. 508

954. Биссектриса RU треугольника RTS равна стороне RS и отрезку TU (рис. 508). Найдите углы треугольника RTS .

955. Найдите углы треугольника, в котором биссектриса одного из углов разделяет треугольник на два равнобедренных треугольника.

956. Найдите периметр и площадь четырехугольника на рисунке:

а) 509, учитывая, что сторона DC равна 16;

б) 510, учитывая, что сторона FG равна 9.

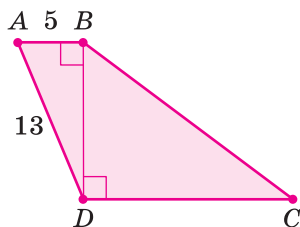


Рис. 509

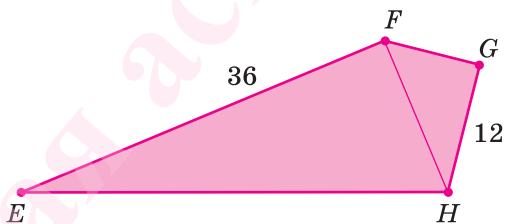


Рис. 510

957. Морская вода содержит 8 % соли. Сколько килограммов пресной воды нужно долить к 10 кг морской воды, чтобы содержание соли стало равным 5 %?

958. Индигирка, Алазея, Колыма — наиболее крупные реки, впадающие в Восточно-Сибирское море. Расход воды в нижнем течении Алазеи относится к расходу воды в нижнем течении Индигирки как $6 : 37$ и в 13 раз меньше расхода воды в нижнем течении Колымы. Найдите расходы воды этих рек, учитывая, что расход воды Колымы на $2050 \text{ м}^3/\text{с}$ больше расхода воды Индигирки.

959. На рисунке 511 приведены соотношения между длинами Индигирки, Алазеи, Колымы. Составьте задачу и решите ее.

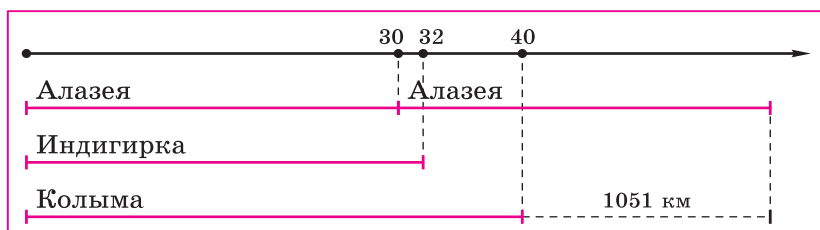


Рис. 511

960. Турист на велосипеде выехал из Мяделя в Илью (рис. 512) и на всю поездку затратил 4 ч 30 мин с учетом того, что он отдыхал в Костеневичах $\frac{2}{5}$ ч. С какими скоростями ехал турист до отдыха и после отдыха, если после отдыха скорость была на 1 км/ч меньше?

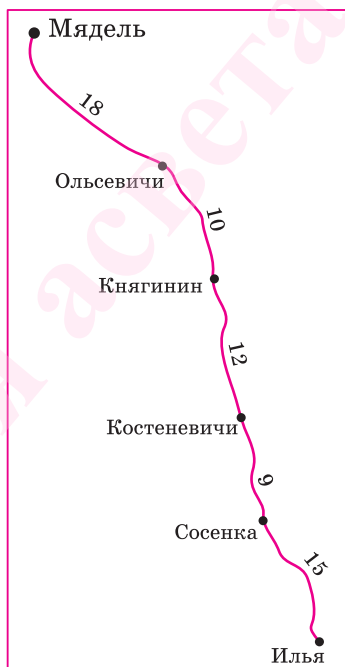


Рис. 512

961. Объем воды Паульского озера относится к объему воды Березовского озера как $535 : 263$, а объем воды последнего к объему воды озера Яново как $23 : 76$. Найдите, сколько воды в каждом из этих озер, учитывая, что воды в Янове на $15,05$ млн м^3 больше, чем в Паульском.

962. Мелколиственные леса нашей страны состоят из бородавчатоберезовых, осиновых и сероольховых лесов. Бородавчатоберезовые и осиновые леса составляют соответственно $81,1\%$ и $13,5\%$ от площади мелколиственных лесов, а сероольховые леса занимают 64 тыс. га. Определите:

а) какие площади занимают бородавчатоберезовые и осиновые леса;

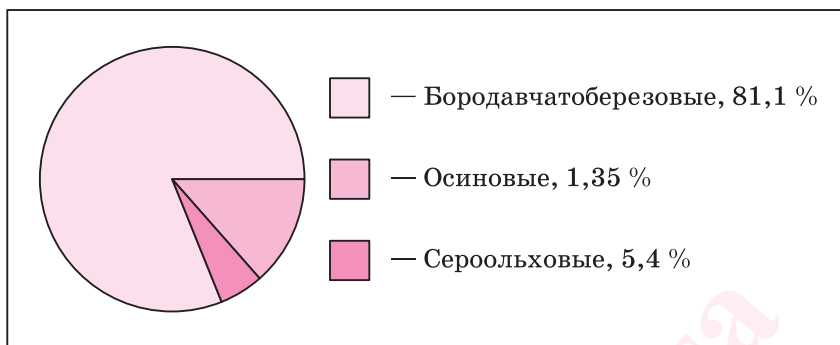


Рис. 513

б) правильно ли построена круговая диаграмма, представленная на рисунке 513.

963. Янка, Березовка, Мнюта — крупнейшие притоки Дисны, протекающие по Шарковщинскому району. За сутки они вместе в среднем вливают в Дисну 1,2 млн м^3 воды. Это же количество воды Березовка вливает за 3,02 сут, а Березовка вместе с Мнютой — за 1,36 сут. Определите с точностью до десятой кубического метра в секунду среднегодовые расходы этих рек в их устьях.

964. Из Барановичей и Осиповичей в одно время навстречу вышли два поезда (рис. 514). Скорость поезда из Барановичей на 4 км больше скорости другого поезда. Через полтора часа расстояние между ними стало равным 34 км. Определите скорости поездов.

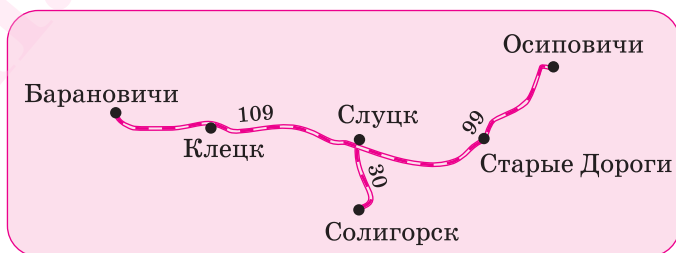


Рис. 514

965. На территории Толочинского района начинаются реки Оболянка, Бобр, Друть, Усвейка. Длина Друти на 47 км больше удвоенной длины Бобра и на 63 км больше удвоенной длины Усвейки. Найдите длины этих рек, учитывая, что длина Бобра относится к длине Усвейки как $31 : 29$, а Оболянка короче Усвейки на 27 км.

966. Площадь сельскохозяйственных угодий Толочинского района относится к площади его лесов как $294 : 145$, а к площади других земель — как $294 : 61$. Найдите распределение земель Толочинского района, учитывая, что площадь земель, занятая лесами, на 252 км^2 больше площади других земель. Ответ покажите круговой диаграммой.

967. По Столинскому району протекают притоки Припяти — реки Стыр, Горынь и Ствига. Длины Стыри и Ствиги относятся как $242 : 89$, а Горынь длиннее Стыри на 175 км. Найдите длины этих притоков Припяти, учитывая, что разность длин Горыни и Ствиги на 3 км меньше длины Стыри.

968. Население Давид-Городка в 1971 году относится к населению в 1959 году как $3 : 4$, а к населению в 1995 году как $23 : 25$. Население этого города в 1897 году составляло $\frac{2}{3}$ от населения в 1939 году и $\frac{39}{46}$ — от населения в 1959 году. Найдите численность населения Давид-Городка в названные годы, учитывая, что в 1939 году по сравнению с 1995 годом она была на 4,2 тыс. человек больше.

969. Леса занимают 35 % территории Столинского района, и это составляет 96,1 % от площади сельскохозяйственных угодий. Найдите с точностью до квадратного километра площади, занятые леса-

ми и сельскохозяйственными угодьями, учитывая, что другие земли занимают 972 км^2 . Распределение земель Столинского района покажите круговой диаграммой.

970. В Столбцовском районе площади лесов, сельскохозяйственных угодий и других земель относятся как $44 : 41 : 15$. Постройте круговую диаграмму распределения земель Столбцовского района. Сколько квадратных километров занимают леса, сельскохозяйственные угодья и другие земли, учитывая, что площадь Столбцовского района равна 1900 км^2 ?

971. Отец с сыном ведрами носили воду, причем ведро отца вмещало в 2 раза больше воды, чем ведро сына. Отец принес на 14 ведер больше сына. Сколько ведер принесли отец и сын в отдельности, учитывая, что отец заполнил бочку вместимостью 210 л, а сын — кадку вместимостью 35 л?

972. Масса 20 столовых и 70 чайных ложек равна 2150 г. Найдите массу столовой и чайной ложек в отдельности, учитывая, что вместе их масса 70 г.

973. В общежитии есть двухместные и четырехместные комнаты, причем четырехместных комнат на 60 больше, чем двухместных. Найдите количество двухместных и количество четырехместных комнат в общежитии, учитывая, что все четырехместные комнаты вмещают в 6 раз больше проживающих, чем все двухместные комнаты.

974. Хозяйство закупило 25 саженцев яблонь и 20 саженцев груш, причем за все саженцы заплатило 3 100 000 р. Найдите цены одного саженца яблони и одного саженца груши, учитывая, что они относятся как $3 : 4$.

975. Хозяйство закупило саженцы яблонь по 75 000 р. и саженцы груш по 90 000 р., причем за все саженцы заплатило 4 050 000 р. Учитывая, что количество саженцев яблони относится к количеству саженцев груши как $3 : 2$, найдите эти количества.

* * *

976. Какое наибольшее количество королей можно поставить на шахматную доску, чтобы они не били друг друга?

977. Можно ли все натуральные числа от 1 до 21 распределить на несколько групп так, чтобы наибольшее число в каждой группе было равно сумме остальных?

978. Нашли сумму цифр числа 2^{2010} , затем сумму цифр полученного числа, и так продолжали до тех пор, пока не получили однозначное число. Какое это число?

ОТВЕТЫ

Раздел I

11. 1,1 см. 12. а) 45 : 12; к) 1 : 1. 14. а) 99; 261; г) 69; 141.
18. 90°. 19. 126°. 23. а) 109°44'; к) 2°48'; м) 2°43'13".
24. а) 70°33'; б) 21°49'; в) 44°2'; г) 34°52'; д) 49°31'26";
е) 43°25'26"; ж) 49°39'26"; з) 114°1'; и) 79°39'10"; к) 42°39'5";
л) 50°31'6"; м) 13°28'11". 25. б) 18°24'; д) 7°8'30"; ж) 2°55";
з) 7'11,5"; м) 99°44'24". 33. 35 тыс. 34. 613 км, 100 км,
100 км. 35. $4\frac{2}{3}$ и $5\frac{1}{3}$. 36. 1600. 38. В 1522 г. 41. 70° или 22°.
44. 85°. 47. 57°; 123°. 48. 31°; 149°. 51. 76°; 104°. 52. 80,5°,
99,5°. 53. 30°, 150°. 54. 72°, 108°. 55. Первый, на 35°.
57. а) 115°, 65°; б) 140°, 40°; в) 150°, 160°; г) 15°, 15°, 30°;
д) 22°, 136°, 44°; е) 75°, 30°, 15°, 15°. 58. а) 138°, 42°, 138°;
б) 133°, 47°, 133°, 47°; в) 76°, 46°, 76°, 58°; г) 42°, 96°, 42°,
42°, 96°; д) 90°, 90°, 90°, 48°, 42°; е) 146°, 34°, 146°, 47°, 99°;
ж) 140°, 40°, 110°, 70°; з) 60°, 120°, 60°, 120°, 96°, 84°, 96°,
84°. 60. 95°, или 75°, или 45°. 69. а) 1,4; б) 3,08; в) 5,6; г) 28.
70. а) $-3\frac{2}{7}$; б) $32\frac{6}{7}$; в) $-13\frac{1}{7}$; г) $1\frac{11}{35}$; д) -46; е) -0,46. 71. а) 11,27;
б) -9,429; в) -1,12; г) 1; д) $1\frac{2}{7}$; е) выражение не имеет значения;
ж) $-2\frac{89}{175}$; з) 7,2. 73. а) 1320 км, 1165 км, 724 км, 334 км;
в) 79 км³, 10 км³, 29 км³, 8 км³. 74. а) 45 см и 27 см; б) 6 см
и 8 см; в) 5 см и 11 см. 75. а) 56 см² и 64 см²; б) 4 см и 14 см;
в) 4 см и 16 см. 76. 4 ч.

Раздел II

83. а) $-3,1 + 4,06 \cdot (-0,5) - (0,159) : 0,003 = 47,87$; б) $\left(\left(\frac{15}{28} - \frac{11}{36}\right) \times\right.$
 $\times \frac{21}{29} + 6\frac{6}{7} : \frac{16}{21}\bigg) : 16,5 = \frac{5}{9}$. 84. а) $3\frac{1}{4}$; б) $-\frac{1}{3}$; в) $3\frac{43}{60}$; г) $-7\frac{5}{7}$;
д) 10,4; е) не имеет значения. 85. а) 0; б) 0; в) -47 232;
г) -585,585. 86. а) $a \cdot 10 + 1$; б) $a \cdot 100 + b \cdot 10$; в) $a \cdot 100 + b \cdot 10 + 2$;
г) $a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$; д) $a \cdot 1000 + b \cdot 10 + 6$; е) $a \cdot 10\,000 +$
 $+ b \cdot 1000 + c \cdot 100 + 6$; ж) $a \cdot 100\,000 + 3 \cdot 10\,000 + s \cdot 100 + 9$;
з) $h \cdot 1000\,000 + 5 \cdot 1000 + f \cdot 10 + k$. 87. а) $t \cdot 1000$; б) $a \cdot 1000 +$
 $+ b \cdot 100$; в) $r \cdot 1000$; г) $t \cdot 100\,000 + d \cdot 100$; д) $z \cdot 60$; е) $t \cdot 3600 +$

$+ r \cdot 60$; ж) $a \cdot 10\,000 + b \cdot 100 + c$. **89.** а) $(19a + 24b) : 10$; б) $s + 50 \cdot 3$; в) $s : (v - a) + s(v + a)$; г) $(k \cdot a + l \cdot 12) : (a + 12)$. **90.** а) $c \neq 0$; д) $z \neq -3$; е) $n \neq 7$; ж) $y \neq 0,5$; л) $q \neq 0$. **92.** а) $(m + b + 2a)(n + c) - ad - bc - 0,5\pi(a^2 + b^2)$; $2m + 2n + 2c + 2a + \pi(a + b)$; б) $(a + 2c)(b + 2c) - \pi c^2$; $2a + 2b + 2\pi c$. **93.** а) 4,2; б) 7,2; в) 14; г) -3,5; д) $-9\frac{1}{3}$; е) -5,6. **94.** а) $\approx 1,53$; б) -1; в) $\approx 25,33$; г) $\approx -3,20$. **98.** д) $\approx 29,3^\circ$; е) $179,2^\circ$; ж) $-29,6^\circ$; з) -80° ; и) -52° . **100.** а) $\approx 31,3^\circ$; б) 125° ; в) 0° ; г) $\approx 57,3^\circ$; д) 130° ; е) 625° ; ж) $\approx 16,3^\circ$; з) $-97,5^\circ$; и) $\approx 6,3^\circ$; к) $\approx 1,3^\circ$; л) 100° . **101.** а) $8,8 \text{ г/см}^3$; б) $0,9 \text{ г/см}^3$; в) 2 г/см^3 . **107.** а) $P = 2a + 2b - 2c - 2d + 2t$, $S = ab - cd$; б) $P = 4a + 2b + 4d + 2c$, $S = (2a + b)(c + d) - bd$; в) $P = 2a + 2b + 4(f + g)$, $S = ab - 2dc - 2de - 2fg$. **108.** 6. **115.** 3000 л. **116.** 0,796 г. **117.** Солнце — 1 190 000 % и 3 320 000 %; Меркурий — 77,56 млн км² и 0,299 млрд Тт; Луна — 7,30 % и 1,23 %, Марс — 17,14 млн км² и 0,66 млрд Тт; Юпитер — 11 990 % и 840 %; Сатурн — 41 490 млн км² и 570 млрд Тт; Уран — 16 % и 1450 %; Нептун — 7840 млн км² и 1730 %. **118.** В 12 ч на расстоянии 56 км. **119.** 21,5 т/га, 42 га. **126.** $v_{\text{ср}} = (60a + 72b) : (a + b)$ км/ч; а) 67,2 км/ч; б) 66,4 км/ч. **127.** а) -2,5; 0,4; б) $\frac{1}{12}$; -12; в) -4; 0,25; г) 7; $-\frac{1}{7}$. **128.** а) $m : n + l$; б) $(r + s)t$; в) $a - b : c$; г) $(x - y) : \frac{x + y}{2}$. **130.** а) $-3k + 9l - 6$; е) $q - 6s + 2a$. **131.** а) $-12 - 2w$; б) $a + b - 7,2$; в) $2m - 2n$; г) $91 - 2k$; д) $3w - 7v$; е) $7,6z - 3,2t$. **132.** б) $(2z + 4t) + (-22u - v + w)$. **133.** а) $(w + x) + (-y + z)$; б) $(w - y) + (x + z)$; в) $(w - y) - (-x - z)$; г) $(w + z) - (y - x)$. **134.** а) 3,5; б) -2; в) 3; г) 36; д) 8; е) $-\frac{1}{72}$. **135.** д) 6,71 га; е) 286,6 га; ж) 2485 см³; з) 11,874 Мт. **140.** а) $4a - 6$; б) -4; в) $2a - 4$; г) 0. **141.** а) -5; б) 0; в) нет корней; г) 0; д) 2; е) c — любое число. **142.** а) 3; б) -9; в) нет корней; г) -4; д) b — любое число; е) 0. **143.** а) $4\frac{2}{3}$; б) -3,2; в) $\frac{10}{29}$; г) 1,7; д) -1; е) -0,6; ж) 2; з) h — любое число; и) нет корней; к) -2. **145.** а) $2b^2$; б) $2x^2 + 2$; в) $4k$; г) $7m^2n + 3mn^2 - 4mnp$; д) 0; е) $9a^3 - a^2 + 4a$; ж) $z^3 + 5zy^2 - 13y^2$; з) $2ab^2 - 4ab - 5b$. **146.** а) $3\frac{7}{12}$; б) $9\frac{2}{3}$; в) $2\frac{1}{14}$; г) $-\frac{77}{78}$; д) $3\frac{1}{8}$; е) $18\frac{1}{3}$; ж) $\frac{2}{3}$; з) -0,6;

и) 0,75. **149.** 65 см, 30 см, 45 см. **150.** 65°, 50°, 65°; 27°, 130°, 23°. **151.** а) За 7 ч 30 мин; б) за 20 ч; в) за 12 ч 30 мин. **152.** 555 га. **153.** 26,4 и 1,55. **154.** 80 км, 64 км. **155.** $\approx 25,2$ ц/га. **157.** 54 л. **163.** а) 0,4; б) $\frac{3}{7}$; в) 3,75; г) 3,75; д) $\frac{1}{3}$; е) 0,4; ж) $\frac{2}{3}$; з) $-\frac{3}{4}$; и) 0,6; к) 0. **164.** а) 2; б) $-5\frac{1}{3}$; в) $3\frac{1}{18}$; г) 1; д) 20; е) 0. **166.** а) 18; б) 10; в) 2; г) -3; д) 0; е) -1,85; ж) 0,2; з) 18; и) $1\frac{3}{11}$; к) 13,75; л) 0,856; м) 319; н) -0,9; о) 3. **167.** а) -3; б) 12; в) 8; г) 0; д) 20; е) 5. **168.** а) 4; б) -4; в) -7,2; г) $\frac{38}{59}$; д) $\frac{77}{243}$; е) $-1\frac{30}{37}$. **169.** а) 2; б) 3; в) -1; г) 4. **170.** а) -5; б) 7; в) 8; г) 2; д) -2; е) $q=0,5$. **171.** а) 4; б) -2; в) 5; г) -3; д) 1; е) 2. **176.** $\approx 31,2$ %. **177.** 7288 тыс. р. **178.** 520 км, 140 км. **179.** 22 ц, 2,7 ц, 0,3 ц. **180.** 5,5 км/ч, 17,5 км/ч. **181.** 80 км, 109 км, 41 км, 47 км. **182.** 5,9 м³/с. **183.** 18 февраля 1893 г. **184.** 2000 р. и 500 р.; 1500 р. **186.** 420. **187.** 10,5. **188.** 10. **189.** 4; 6; 8; 10. **190.** Через 8 лет. **191.** 2200 т, 1100 т. **192.** 27 км/ч. **193.** 5600, 2200. **194.** 22,5 км. **195.** 375 г. **196.** 420. **197.** 14; 25; 36; 47; 58; 69. **198.** а) 377; б) 177; в) не существует; г) 777; д) 577; е) 477. **199.** 125 и 100. **200.** а) 48; б) 56; в) 72; г) 75; д) 87. **201.** 16 км. **202.** 3 дня и 195 с. **203.** 8 см, 20 см, 15 см. **204.** 2, 3, 1. **206.** 34 км³, 4 км³, 10 км³. **208.** а) -5; б) -1; в) 9; г) 94. **210.** а) $5\frac{44}{45}$; б) 0; в) $\frac{546}{731}$; г) 5; д) $\frac{2}{3}$. **213.** 39°, 76°, 65°. **214.** а) 6 см, 9 см, 15 см; б) 558 см²; в) 8100 см³. **215.** 32°, 68°, 80°. **216.** 60 см, 105 см. **217.** 1441 г. **218.** Нули. **219.** 0,45. **229.** а) $y=3x$; б) $y=\frac{1}{3}x$; в) $y=-3x$; г) $y=3x$; д) $y=1,5x$; е) $y=-\frac{1}{3}x$. **230.** а) $y=-3x$; б) $y=0,6x$; в) $y=0,4x$; г) $y=-2,4x$. **238.** C(1,5; 0), D(0; 3); а) при $n < 1,5$; б) при $n > 1,5$; в) при $n \geq 1,5$; г) при $n \leq 1,5$. **239.** а) При $c > 1,25$; б) при $c < 1,25$; в) при $c \leq 1,25$; г) при $c \geq 1,25$. **240.** а) R(2; 0), S(0; -8); б) R(12; 0), S(0; 12); в) R(-45; 0), S(0; 18); г) R(16,5; 0), S(0; -11). **241.** а) При $r < 5$; б) при $r \geq 1$; в) при $r > 2,5$; г) при $r \leq 5,5$. **242.** а) При $2 < m < 4,5$; б) при $0 \leq m \leq 4$; в) при $1 \leq m < 2$; г) при $-3 < m \leq 0,5$. **244.** а) $y = -\frac{2}{3}x + 2$;

б) $y = -2x + 4$; в) $y = -2x - 4$; г) $y = -\frac{m}{n}x + m$. **249.** а) $(-2; 3)$; б) $(0,95; 2,285)$; в) графики не пересекаются; г) $(3; 3)$; д) графики не пересекаются; е) $(3; -23)$. **253.** а) 7 см, 14 см, 14 см или $9\frac{1}{3}$ см, $9\frac{1}{3}$ см, $16\frac{1}{3}$ см; б) 72° , 72° , 36° или 84° , 48° , 48° . **255.** 21 ц. **256.** 35. **257.** Через 4 ч. **258.** 60 см, 25 см, 40 см, 15 см. **260.** 7.

Раздел III

274. а) 160 мм; б) 67° , 113° , 113° , 67° . **285.** а) 1,5; б) 5,25; в) $-2,6$; г) $\frac{2}{7}$. **286.** 53 %, 26,8 %. **287.** 46 тыс. га, 90 тыс. га. **288.** 147 км, 126 км, 109 км. **289.** 12 дет./ч, 4 дет./ч. **290.** Условие противоречивое. **291.** 12 100 и 800. **292.** 80 книг, 140 книг. **293.** 96 книг, 192 книги. **294.** Первый — Сергей, второй — Петя, третий — Андрей, четвертый — Янка, пятый — Толя. **295.** 18 с. **296.** 105 263 157 894 736 842. **308.** 14° . **313.** а) $v = \frac{756}{t-1} - 53$; б) $t = \frac{756}{53+v} + 1$. **314.** 14,2 и 10,5. **315.** 87. **316.** 18 км/ч, 14 км/ч, 21 км. **317.** 3530 км, 2428 км, 1364 км. **319.** 0,29 %, 0,009 %, 0,01 %. **320.** 21 и 7. **321.** 840 ц и 660 ц. **322.** 720 ц и 550 ц. **323.** 462 и 1114. **324.** 0,5 и -1 . **325.** 369. **327.** 15 см. **329.** 75° , 65° , 40° . **331.** 1 : 1. **335.** 60° . **337.** а) 20° , 130° , 30° ; б) $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{360^\circ - \alpha - \beta}{2}$, $\frac{\beta}{2}$. **338.** а) 20° , 80° , 80° ; б) 30° , 70° , 80° . **345.** 224 км, 224 км, 156 км, 260 км. **348.** 20 и 70. **349.** 1200 и 1000. **350.** 640 и 480. **351.** 4; 5; 7; 8; 10; 11; 13; 14; 19; 29. **352.** (1; -6); (2; -1); (8). **353.** 4. **356.** 25° , 240° . **368.** 44 мм. **369.** 24 мм, 18 мм; 18 мм, 30 мм; 30 мм, 24 мм. **373.** 55 мм, 45 мм. **376.** а) 2; б) $3\frac{9}{13}$. **380.** 230 см, 135 см, 160 см, 300 см. **381.** 100 см, 150 см, 85 см, 230 см. **383.** $12a + 24$; $\frac{L-24}{12}$. **384.** 5 га и 10 га. **385.** 10 и 5. **386.** 120 и 96. **389.** 16 лет, 10 лет, 7 лет. **391.** 5. **392.** а) 40; б) 55; в) 95; г) 15. **393.** 6. **395.** а) 80; б) 30 или 50; в) 120. **397.** $a + b + |a - b| < P < 2(a + b)$. **400.** а) 35° , 110° , 35° ; б) 55° , 70° , 55° или 70° , 40° , 70° . **401.** а) 45° ;

- б) 45° . 404. а) $AB > AC > BC$; б) $AB > AC = BC$; в) $AC = AB > BC$.
 409. а) 236; б) 182 или 226. 410. 29 и 29. 411. 10; 10; 15.
 413. а) $-2\frac{2}{9}$; б) 2. 414. а) -5; б) 1; в) 3; г) -4,75; д) 7; е) -0,8.
 415. а) 3; б) -1,6. 416. а) 22; б) 7. 417. а) (-2; 14); б) (6; 23).
 418. а) $A(-4; 0)$, $B(0; 8)$; б) $M(2; 0)$, $N(0; 4)$; в) (0; -2).
 419. а) $P(-3; 2)$, $Q(1; 2)$, $R(-1; -2)$, $G(-1; \frac{2}{3})$; б) (0; 0);
 в) $K(-2; 0)$, $L(0; 1\frac{1}{3})$; г) (0; -1). 420. На 8 % увеличился.
 421. На 400 %. 422. 400 кг. 423. 200 г. 424. 4. 425. 6000 р. и
 9000 р. 426. 10 и 4. 431. а) 55° , 35° ; б) 15° , 75° ; в) 36° , 54° ; г) 54° ,
 36° . 432. 31° , 90° , 59° . 435. 12 см и 6 см. 437. 30° , 30° , 120° .
 438. 45° , 60° . 441. 40° , 40° , 100° . 442. 30° , 60° , 90° . 446. 75° ,
 75° , 30° . 448. 5 см, 15 см. 449. а) -1,3; б) -8,43; в) 12,1;
 г) 2,76; д) 6,9; е) -5,2; ж) -2; з) -15,29. 450. а) 5^6 ; б) 5^{10} ;
 в) 5^{12} ; г) 5^{21} ; д) 5^8 ; е) 5^{24} ; ж) 5^{20} ; з) 5^{40} ; и) 5^{3i} ; к) 5^{12q} . 452. 1 : 3.
 453. $\frac{2}{5}$. 454. 200, 160. 455. $\approx 2,8$ кг. 456. 2 и 6. 457. 9 дет./ч,
 12 дет./ч. 458. 6 ч и 4 ч. 461. 105 263 157 894 736 842.

Раздел IV

472. а) a^{11} ; в) c^{32} ; д) e^{90} ; е) f^{22} ; ж) g^{24} ; з) h^{32} . 474. е) $\frac{5}{13}a^{10}x^4y^{10}$;
 ж) $1,92d^8h^9f^8$; з) $-9,3i^8r^4t^5$; и) $-2k^{15}n^2p^5r^7$; к) $-a^5u^6v^8w^5$;
 л) $-\frac{2}{3}a^9b^{14}i^{12}k^4$; м) $a^6u^{17}v^{11}y^2$. 478. д) $40\frac{1}{3}h^{16}$; е) $-0,1u^{13}v^{10}$;
 ж) i^4j^5 ; з) $0,2a^3x^{11}y^3$. 482. а) $-2\frac{1}{3}$; б) -1,8; в) 60; г) $-\frac{2}{3}$.
 483. 70° . 484. а) 70° ; 40° ; 70° ; 40° ; 70° ; б) 80° ; 80° ; 60° ;
 80° ; 20° . 487. 8,9 тыс.; 0,9 тыс.; 2,9 тыс. 488. Через 2 ч.
 489. 241 чел./км². 490. 10 тыс. л. 491. 2 ч и 3 ч. 492. 16 дет./ч,
 10 дет./ч. 493. 9. 494. 198. 499. а) $9k-9$. 500. а) $-a+4$;
 д) $-3j^2l+4jl^2$. 501. г) $\frac{5}{3}x^3y^2-3p^3q^4$. 502. а) 2; б) 3; в) 1; г) 3; д) 0;
 е) 2. 503. а) t^3 ; б) $6\frac{4}{9}t^2$; в) $\frac{31}{32}xyz$; $2xy+2xz+2yz$. 505. г) $-6,4h^3-$
 $-5,4h-2,1$; д) $-\frac{11}{6}b^2y-\frac{1}{4}by$. 510. а) $1\frac{7}{75}$; б) $-1\frac{29}{35}$; в) нет

корней; г) $-3\frac{1}{6}$. 511. а) -3 ; б) 3 . 517. а) $-5\frac{5}{6}$; б) $2\frac{3}{13}$;

в) $-0,89$; г) $3\frac{23}{59}$. 520. 32 км, 40 км, 128 км. 521. $2,1 \text{ м}^3/\text{с}$;

$1,4 \text{ м}^3/\text{с}$; $16,7 \text{ м}^3/\text{с}$. 522. 7,5 тыс.; 7,2 тыс.; 11,6 тыс.

523. $1,4 \text{ млн м}^3$; $2,59 \text{ млн м}^3$; $0,3 \text{ млн м}^3$. 524. 9 см, 7 см,

11 см. 527. 5 км/ч, 15 км/ч. 528. 32 ц/га, 28 ц/га. 529. 25 га,

20 га. 531. $264^2 = 69\,696$. 537. а) $10q^3 - 16q^2 + 14q$;

б) $7d^2 - 10ed + 10e^2$; в) $-36t^2 - 7t$; д) $-3x^2 - xy + y^2$. 538. а) $5v^3 -$

$-92vw$; б) $-58x^2 + 47xy$; в) $0,8a^2 + 18,36ax - 1,4x^2$; г) $1,3d^3 -$

$-1,18d^2 - 0,72d - 2,56$; д) $-20z + 26$; е) $14m + 27y - 51$.

541. а) $-0,5$; б) 8 ; в) 1 ; г) нет корней; д) $-0,5$; е) 3 ; ж) $10,5$;

з) $-9,75$. 546. з) $m^6 - 1$; к) $v^4 - w^4$; л) $p^5 + q^5$. 548. а) $0,5$;

б) -17 ; в) 5 ; г) 8 ; д) 2 ; е) -13 ; ж) $1,4$; з) 4 ; и) $\frac{10}{13}$; к) $1\frac{34}{43}$;

л) $\frac{10}{53}$. 549. 10, 12, 14, 16. 550. $21\frac{2}{3}$ см, $13\frac{1}{3}$ см. 553. а) 5 ;

б) -4 ; в) -2 ; г) -2 . 557. 70° , 35° , 45° , 210° . 559. 76 км,

62 км, 56 км. 560. $3,4 \text{ м}^3/\text{с}$; $3,2 \text{ м}^3/\text{с}$; $2,4 \text{ м}^3/\text{с}$. 561. $7,4$ г.

562. $9\frac{2}{3}$ г. 563. 4,2 мл. 565. 36 т и 12 т. 566. 60 и 40. 567. 34

и 28. 576. а) $11z^4 - 21z^3 - 3x$; б) $-l^2 - 7k^2l^3$; в) $b - a$; г) $7v - 12$;

д) $-6y + 7,5$; е) $-9u^2 + 4u - 2$. 577. а) 0 ; $0,5$; е) 0 ; $4,8$.

583. а) -2 ; б) 4 . 584. 27, 29, 31. 585. а) 400 кг;

б) 200 г. 587. 26 км, 14 км, 17 км. 588. 4 и 2. 589. 5000 р.,

3000 р. 590. 25 и 10. 591. 1535 г. 601. к) $\frac{4}{9} - \frac{4}{3}g + g^2$; л) $\frac{4}{9}l^2 +$

$+ i + \frac{9}{16}$. 602. ж) $\frac{4}{9}x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{4}$; м) $5\frac{4}{9}v^2 + 7v^3 + 2\frac{1}{4}v^4$; о) $0,04a^2 +$

$+ 0,32az + 0,64z^2$. 604. а) $0,25x^4 - 2x^2y + 4y^2$; в) $6,25z^4 + 6z^5 +$

$+ 1,44z^6$; д) $\frac{9}{16}y^4 - \frac{3}{4}y^2c^2 + 0,25c^6$; е) $\frac{25}{9}d^8 + 2d^4e^2 + 0,36e^4$;

з) $2\frac{1}{4}k^4l^4 - 1\frac{1}{3}k^5i^5 + \frac{16}{81}k^6i^6$. 606. а) y^2 ; б) 49; в) $12yb$; г) $18ij$;

д) $64d^2$; е) $9g^2$. 607. а) $16y$; б) $-98 - 14n^2$; в) $x^2 + 49$; г) $1 - 12d$;

з) $30s^2 + 10s + 1$. 608. а) $1,5$; б) $\frac{3}{32}$; в) 3 ; г) $1\frac{1}{24}$; д) -46 ; е) -4 ;

ж) $0,4$; з) $0,5$. 611. б) $9u^8 - v^4$; в) $0,49d^2 - \frac{9}{16}c^2$; д) $\frac{49}{9}m^2 -$

$-\frac{4}{9}n^2$; е) $0,64p^4 - \frac{25}{36}q^2$; ж) $2,56k^6 - i^2j^2$; з) $0,25q^8 - 0,16p^6$.

612. б) $n^3 + mn^2 - m^2n - m^3$; в) $c^3 - 18c^2 + 81$; д) $u^4 - 32u^2 + 256$; ж) $z^4 - 1$; л) $v^8 - 98v^4 + 2401$. **613.** а) $a^2 + 6ac + 9c^2 - 4b^2$; б) $x^2 - 9y^2 - 25z^2 - 30zy$; в) $i^2 + j^2 - k^2 - l^2 + 2ij - 2lk$; г) $e^2 + f^2 - g^2 - h^2 - 2ef - 2gh$; д) $m^6 + 27$; е) $p^4 + g^4 + r^4 - 2p^2g^2 - 2p^2r^2 - 2g^2r^2$; ж) $n^6 - 3n^4h^2 + 3n^2h^4 - h^6$; з) $t^5 + t^4v - 2t^3v^2 - 2t^2v^3 + v^4t + v^5$; и) $b^2 + c^2 + d^2 + 2bc + 2bd + 2cd$; к) $m^2 + 4p^2 + 9t^2 + 4mp - 6mt - 12pt$; л) $4q^2 + r^2 + 9x^2 - 4qr + 12qx - 6rx$; м) $9 + a^2 + z^2 - 6a - 6z + 2az$.

614. а) $\frac{1}{8}$; б) нет корней; в) -2 ; г) 1 ; д) 7 ; е) $\frac{5}{8}$; ж) $1,4$;

з) 4 ; -4 . **617.** 50 мм. **621.** а) 66 ; б) 56 . **626.** 25° ; 50° ; 150° ; 135° . **628.** 40 и 170 рупий. **629.** $11,6$ тыс. чел.; $4,6$ тыс. чел.; $40,3$ тыс. чел. **630.** 504 км^2 ; 549 км^2 ; 551 км^2 . **631.** 12 дет./ч, 4 дет./ч. **632.** 7500 р., 4500 р. **633.** 120 и 180 . **635.** 6 . **637.** а) $(a+1)(a^2+1)$; б) $(x^2-1)(x^4-1)$; в) $(b-3)(b^2+3)$; г) $(y^3-1)(y^2+3)$; д) $(c^4-2)(c^2-7)$; е) $(z^5-a)(z-5)$; ж) $(n^2-4m) \times (n+1)$; з) $(d+c)(13-c)$; и) $(8-g)(8-g^2)$; к) $(s^2+7)(s-7)$; л) $(7v-3u)(v-4u)$; м) $(4i-j)(j-3c)$; н) $(9d-11a)(d+2a)$; о) $(11h-13g)(h^2+3)$. **638.** а) $ab(1-ab)(1+ab^2)$; б) $xy(1-xy) \times (1+xy)(xy^2-1)$; в) $(3u^3v^2-4u^2v^3)(1-2v)$; г) $(4z^3+3z^2)(z-1)$; д) $3(5x-4v)(x^3-u^2)$; е) $8(2j^2-3k^2)(i-j)$; ж) $cd^3(2c^2+1)(5c-4d)$; з) $m^2n(2m^2-3n)(1-3mn)$. **639.** а) $(a+b+2)(1+ab)$; б) $(c-d) \times (x^2+x-1)$; в) $(c+d)(x^2-x+1)$; г) $z(z+1)(p+q-r)$; д) $z(z-1) \times (p+q+r)$; е) $(m-1)(m^4+m^2+1)$; ж) $(w+1)(w^4-w^2+1)$; з) $(m-n+1)(m-n^2)$. **640.** а) $(a^2-b)(b^3-a)$; 25 ; 175 ; 35 ; -55 ; б) $(x-9)(x-y)$; 0 ; 324 ; 0 ; 0 ; в) $(b-c)(3u-5v)$; $5,5$; $49,5$;

г) $(m-n)(2-mn)$; $1\frac{19}{21}$; 0 ; 8646 . **643.** а) $(x+1)(x+2)$;

б) $(a+8)(a-1)$; в) $(c+10)(c-1)$; г) $(y+3)(y-1)$; д) $(d-6)(d-1)$;

е) $(z+5)(z+7)$. **645.** в), з) нет корней. **646.** а) $0,4$; б) $-\frac{2}{7}$; в) $\frac{5}{6}$;

г) $-\frac{3}{4}$; д) 2 ; -5 ; е) 2 ; $\frac{8}{7}$; ж) 1 ; -1 ; з) 0 ; $-1\frac{3}{7}$. **647.** а) $ax(x+y)(x-y)$;

и) $2u^2v^2(5u-4v)(5u+4v)$; л) $sr(1,1sr-1)(1,1sr+1)$; м) $2ew \times$

$\times (7e-6w)(7e+6w)$. **648.** а) $(3-a+b)(3+a-b)$; б) $(4+x+y) \times$

$\times (4-x-y)$; ж) $(x-y)(x+y-1)$; з) $(e+f)(e-f+1)$; и) $(i+j)(i^2-j)$;

к) $(g-h)^2 \cdot (g+h)$. **649.** а) $(a-1)(a+1)(a^2-a+1)$; б) $x^2 \times$

$\times (x+1)(x^3-x^2+3)$; в) $2d(3c^2+d^2)$; г) $8yz(y^2+z^2)$; д) $(u-v)(u+$

$+v-1$); е) $3(m-2)(15-n)$; ж) $-5(p+8)(q+3)$; з) $s^3(r-1)(s+1)$;
 и) $e(e-f)(e+1)$; к) $(i-j)(i-k)$; м) $(b-y-5)(b+y+5)$.
650. а) $(a+b)(a-b-1)$; б) $(u-v)(u+v-1)$; в) $(r+s)(1+s-r)$;
 г) $(c+d)(c-d-1)$; д) $(x-y)(1+x+y)$; е) $(m+n)(m-n+1)$;
 ж) $(e-1)(f-1)(f+1)$; з) $(k-2)(k-l)(k+l)$; и) $(t+z)(t-2)(t+2)$;
 к) $(g-h)(g+h)(g+5)$; л) $((i-j)^2+k^3)^2$; м) $p^2q^2(p^2+q^2)(p+q)(p-q)$.
651. а) $(5a+1)(25a^2+10a+1)$; б) $(3-4x)(9+24x+16x^2)$; в) $(5i^2-2j^2)^3$; г) $(2m+5)^3$. **652.** а) $(-a+b)(a^2-ab+b^2)$; б) $-(2+t)(4-2t+t^2)$; в) $(-0,5+y)(0,25-0,5y+y^2)$; г) $\left(\frac{1}{3}s+1\right)\left(\frac{1}{9}s^2-\frac{1}{3}s+1\right)$;
 д) $(m^3+n^2)(m^6-m^3n^2+n^4)$; е) $(i^4-k^3)(i^8+i^4k^3+k^6)$; ж) $-\left(\frac{3}{4}+h^8\right)\times$
 $\times\left(\frac{9}{16}-\frac{3}{4}h^8+h^{16}\right)$; з) $q^6\left(q^2+\frac{5}{6}\right)\left(q^4-\frac{5}{6}q^2+\frac{25}{36}\right)$. **653.** а) $(a^3-b)^2$;
 б) $(2c^5+5y^6)^2$; в) $(5mn^2+6k^2l)(25m^2n^4-30k^2lmn^2+36k^4l^2)$;
 г) $(6d^2f-5eh^3)(36d^4f^2+30d^2efh^3+25e^2h^6)$; д) $(2i-5j)^3$; е) $8(p+3q)^3$;
 ж) $u^5(u-1)^3(u^4+u^3+u^2+u+1)$; з) $(c-g)(c+g)(b-h)(b+h)$.
659. а) $0,72 \text{ м}^2$; б) $2,5 \text{ см}$; в) 50 дм ; г) 846 дм^2 ; д) $4,5 \text{ м}$; е) $0,8 \text{ м}$.
662. а) 8 см ; б) 28 мм ; в) 60 мм ; г) 33 мм ; д) 36 мм ; е) 39 мм ;
 ж) 48 мм ; з) 65 мм . **663.** а) 5 ; б) 15 ; в) 12 ; г) 60 . **664.** 6 см .
665. $D(7; -5)$; $CD=12$, $AB=25$, $AC=20$, $BC=15$. **669.** а) 0 ;
 б) любое число; в) $0,8$; г) 18 . **670.** а) -3 ; б) 1 ; в) 12 ; г) 8 ;
 д) $2,3$; е) $-7\frac{6}{7}$; **672.** а) -2 ; б) 14 ; в) -1 ; г) ни при каком;
 д) $-\frac{2}{3}$; е) -5 . **676.** а) $9, 10, 11, 12$; б) $28, 29, 30, 31$; в) таких
 чисел нет. **678.** $26 \text{ см} \times 26 \text{ см}$; 1176 см^3 . **680.** $2 : 5$. **681.** $10\frac{1}{6} \text{ л}$;
 16 л . **682.** Через 2 ч . **683.** Из Будчи. **684.** 10 дней , 8 дней .
685. 6 ч и 4 ч . **686.** 60 км/ч и 80 км/ч . **687.** 172 км ; 104 км ;
 100 км ; 40 км . **688.** $0,54 \text{ млн м}^3$; $1,8 \text{ млн м}^3$; $4,1 \text{ млн м}^3$.
690. $3, 4, 5$ или 6 .

Раздел V

694. а) 90° ; 20° ; 70° ; 90° ; 20° ; б) 80° ; 0° ; 80° ; 60° ; 40° .
718. а) $7x^3y^3(4y-3x)$; б) $11a^3b(ab+3)$; в) $4p^2q^2(2-9q+3p)$;
 г) $8i^2j^2(2j^2+3i^2-4ij)$; д) $5x(x-5)$; е) $u(u+3)^2(u+3+u^2)$;
 ж) $t^2(t-7)^2(t+1)$; з) $3m(m-n)(-n-3m)$. **719.** а) 20 ;
 б) $-3\frac{2}{3}$; в) 14 ; г) 2 . **720.** а) $2(a+b)(2a-3b)$; б) $2(x-y)(x-2y)$;

в) $(m+n)^2 \cdot n$; г) $(k-i)^2(2i-k)$. **721.** 274 км, 80 км, 76 км.
722. Может. **723.** От 5 % до 5,9 %. **724.** 50 г, 190 г. **725.** 1 кг и 3 кг. **726.** 29. **727.** 22. **728.** 218 кг/га, 178 кг/га. **729.** 120 м³, 225 м³. **730.** 640 м³, 360 м³. **732.** 20 091 960. **740.** а) 140°, 40°; б) 52,5°, 127,5°; в) 40°, 140°. **741.** а) 153°, 27°; б) 82°, 98°; в) 36°, 144°; г) 84°, 96°. **743.** а) 10° или 40°; б) 75° или 55°; в) 50° или 0°. **744.** 70°, 110°. **745.** 40°, 140°. **746.** 72°, 108°, 72°, 108°. **750.** а) 50°, 50°, 80° или 80°, 80°, 20°; б) 60°, 60°, 60°; в) 150°, 15°, 15°. **753.** а) $2(a+2)$; б) $49-2x$. **754.** а) $\frac{2}{19}$; б) 2; в) 3; г) -2; д) 13,75; е) -43; ж) $\frac{48}{83}$; з) 0,6; и) 11.
755. а) $(a-x)(a-7)$; б) $(m-n)(b+11)$; в) $(i-j)(i-j-4)$; г) $(p+q)(2z-1)$; д) $(y^2-5)(y+1)$; е) $3a^2(1-a^2)(6a^4+4a^2+1)$.
756. а) $\frac{35r}{p^5q}$; б) $-\frac{1}{2a^8bc}$; в) $\frac{1}{64e^{2m}}$; г) $2b^{v-t}c^6d^{u+l+1}e^v$; д) $\frac{1}{m} - m^8 + m^3$; е) $-\frac{1}{n^4} - n^{11} + n$. **758.** На 25 %. **759.** 4,5 ч.
760. В 3 раза. **761.** В 2 раза. **762.** В 11 раз. **763.** В 13 раз. **764.** 3 очка. **765.** 480 и 720. **766.** 480 и 540. **770.** 8 см, 10 см, 6 см. **771.** 10 м. **772.** 12 дм, 5 дм, $4\frac{8}{13}$ дм. **773.** 15 см, 20 см, 12 см. **776.** 10 мм. **777.** а) 14 дм; б) 14 дм. **778.** 64 см² или 32 см². **779.** 1 см или 7 см. **780.** 4 см. **781.** 6 см. **782.** 17 см. **783.** 13 см. **784.** 10 см. **785.** а) 360; б) 72; в) 144; г) 720; д) 240; е) 80. **787.** а) $\frac{-a^{15}+a^5-1}{a}$; б) $\frac{1-b^2-b^3}{1}$; в) $\frac{1-mn+m^2n^2-m^3n^3+m^4n^4}{n^4}$; г) $\frac{1+r^2s^4+r^4s^6+r^6s^8}{r^4s^8}$.
788. 20, 24, 36, 48. **789.** 35 см, 46 см, 14 см. **790.** 19,2. **791.** 74 аршина. **792.** В 23 ч 45 мин. **793.** 80 тыс. р., 12 тыс. р. **794.** 2500 р., 1250 р. **795.** 50 и 75. **796.** 50 и 30. **798.** 1 834 567 920.

Раздел VI

800. а) $\frac{a-b}{a+b}$; б) $\frac{xy}{x-y}$; в) $\frac{3(k+l)}{3k+2l}$; г) $\frac{4uvw}{uv+2w}$; д) $\frac{3(a-x)}{4(a-2x)}$.
805. в) $12b^3-4b^2-\frac{3}{4}b-\frac{13}{16}$; г) $31k^3-\frac{1}{7}k-\frac{20}{7}$; д) $-0,5t^2+2ts-$

$-8s^2$; е) $33,5u^2 - 25,6uv + 5,6v^2$. **815.** а) a^2 ; б) $-y^4$; в) $-b^5$;

г) $z^2(z+1)$; д) $36(s-t)$; е) $16(c+3d)$; ж) $\frac{25(u+2v)}{4}$; з) $\frac{3g-h}{25(3g+h)}$.

816. а) $\frac{x+y}{x-y}$; б) $\frac{m-n}{m+n}$; в) $\frac{q+r}{s+t}$; г) $m+n-k$; д) $\frac{i+j-k}{i-j+k}$;

е) $\frac{1}{u+1}$; ж) $\frac{(v-1)^2}{r+s}$; з) $\frac{t-g}{t^2+g}$. **818.** д) $x = \frac{k^2+kl+l^2}{k^2-l^2}$;

е) $x = 3(u-v)$; ж) $x = s+1$; з) $x = \frac{4(i-j)}{i+j}$. **821.** в) $(a-b)(1-b)$;

г) $m^2n^2(n-10m)(n^2+10mn+100m^2)$; е) $(a+t-b-s)(a+t+b+s)$. **822.** д) $f(f+1)^2(f-1)^2$; е) $(p-1)(p^2+1)(p^2+p+1)$; ж) $(c+d)(c^2+cd+d^2)(c^3-d^3+2)$. **824.** а) 13; б) 13; в) 10.

825. 46 см; 78 см. **826.** 160 мл, 40 мл. **827.** 42 км, 115 км, 35 км. **828.** 9600 см³, 2080 см². **829.** 10 000 л. **830.** 12 м²,

18 м². **831.** 6 м, 4 м. **835.** а) $-\frac{a+4}{9a}$; б) $-\frac{11}{5}$. **837.** а) $\frac{a-7}{b-1}$;

л) $\frac{m+6}{m-6}$; м) $\frac{(n+6)^2}{(n-6)^2}$. **839.** и) $\frac{q+2p}{4pq}$; п) $\frac{ml+nl+mk-nk}{k^2l}$;

р) $\frac{y^2-yz-2z^2}{y^2z^2}$. **840.** а) $\frac{c-b}{bc}$; г) $\frac{9f^2+8l^2}{18l^2f^2}$; ж) $\frac{4g^2+2gh-8h^2}{gh}$;

к) $\frac{3pq+6q^2-3pr}{qr}$. **841.** а) $\frac{mn+1}{n}$; б) $\frac{1-p^2}{p}$; в) $\frac{7q}{4}$;

г) $\frac{4r^2-2}{r}$; д) $\frac{v}{u}$; е) $-\frac{1}{2e}$; ж) $\frac{g^2+h^2}{2g}$; з) $-\frac{i^2+j^2}{2j}$;

и) $\frac{11x-7}{12}$; к) $\frac{5a-7b}{12}$; л) $\frac{16y-11z}{12}$; м) $\frac{12c-22d}{10}$.

842. а) $\frac{5x+6}{x(x^2-4)}$; б) $-\frac{2a+1}{a^2-4}$; в) $\frac{9-7u}{1-4u^2}$; г) 2; д) $\frac{2p}{p+q}$;

е) $\frac{m^2-3mn+n^2}{n^2-m^2}$; ж) $\frac{-3v^2}{u^2-v^2}$; з) $-\frac{z^2+z+1}{z(z^2-1)}$. **844.** а) $\frac{2a^2+13a+1}{(a-1)(a+1)^2}$;

б) $\frac{5b^2-32b-36}{(b-2)(b+2)^2}$; в) $\frac{-4x^2+9x-45}{2(x-3)^2(x+3)}$; г) $\frac{24z^2-3y^2+9yz}{y(4z^2-y^2)}$;

д) 0; е) $\frac{20m^2 - 2m - 25}{9 - 4m^2}$; ж) $\frac{q+1}{2q(1-2q)}$; з) $\frac{1-12u}{u^2-1}$.

845. а) $\frac{2a}{5b}$; и) $-\frac{3}{z^2w}$; о) $-\frac{8c^2y^2}{9dz^2}$; п) $\frac{16j}{9k}$. 846. д) $\frac{k^2}{4}$; е) $\frac{3p^2i^2}{qj}$;

ж) $\frac{9v}{5tr}$; з) $\frac{32d^3x}{45a^2bcz}$. 849. а) $\frac{3acd^2}{2b}$; д) $-\frac{3q^5}{5c^5}$; и) $\frac{6kl^2i}{j}$; к) $\frac{46mp^2}{93}$;

л) $\frac{39w^2z}{uv^2}$; м) $\frac{24kz^2}{5t^2s}$. 850. в) $-\frac{c(b+c)}{b^2+c^2}$; ж) $\frac{m^2+mn+n^2}{n(m+n)}$;

к) u^3+v^3 ; м) $\frac{(a+y)(a^2+y^2)}{a(a-y)}$. 851. а) $\frac{5(a-b)}{3(a+b)}$; б) $\frac{1}{(y-3)^2}$;

в) $\frac{f}{c(c-d)}$; г) $\frac{3g-4h}{g+2}$; д) $\frac{2(i+3)}{ki}$; е) $\frac{n(1-p)}{8m}$; ж) $\frac{r^2+2r+4}{q-r}$;

з) $\frac{6v-9}{v+2}$. 854. а) $\frac{1-a}{a(a+1)}$; б) $\frac{1}{x^3(x-y)}$; в) $\frac{b-4}{b(b+4)}$;

г) $\frac{c(d-4c)}{d+4c}$; д) $\frac{2n-m}{m-3n}$; е) $\frac{2ij}{i+j}$. 858. а) 72 см; 216 см²;

б) 180 см; 1080 см²; в) 192 см; 1296 см². 860. 4 ч. 861. 24 000 р.,
26 000 р. 862. 6 и 7. 865. 3. 866. а) $\frac{2m}{m^2-4}$; б) $\frac{6b^2}{a^2-b^2}$;

в) $\frac{q}{p}$; г) $\frac{d-c}{d+c}$; д) $\frac{f}{f-e}$; е) $\frac{y}{x+y}$; ж) $\left(1+\frac{m}{n}\right)^2$; з) $\frac{2(u-v)}{u}$.

867. а) $\frac{7}{3a+1}$; б) $\frac{1}{b-5}$; в) 2; г) 4; д) $\frac{(d^2+e^2)^2-e^2d}{d^4}$;

е) $\frac{1}{m}$; ж) $\frac{p^2+q^2}{4r(p+q)}$; з) $\frac{u^2+36}{12u}$. 868. а) $\frac{-8(x-6)}{x(x^2-16)}$; б) $\frac{7b-1}{9b^2-1}$;

в) $-\frac{p}{m}$; г) $\frac{3c-3}{b-2}$; д) 3; е) $\frac{u-5}{u-4}$; ж) $\frac{v+(v+3)^2}{1-(v+3)^2}$; з) -3.

869. а) $\frac{13-5a}{(a-2)(a-3)}$; б) $\frac{x}{5(x+5)}$; в) $\frac{b-7}{b}$; г) $-\frac{1}{y(y+2)}$;

д) -1; е) $\frac{uv^2}{u-v}$. 870. а) 1; б) 1; в) 1; г) $\frac{mn^2}{m-n}$; д) 1;

е) uv . 873. а) $\frac{1-a}{1+a}$; б) $\frac{x-1}{1-z}$; д) $\frac{z-c}{z^2+c}$; е) $\frac{p+q-r-s}{p-q+r-s}$.

874. а) $-\left(1 - \frac{3xy}{ab}\right)^2$; б) $5s^2 - 2,5s + 21$; в) $\frac{k}{n} - \frac{9m}{8p}$; г) $\frac{u}{2v} \left(\frac{u}{v} - 1\right)$.

875. 74 мм. 880. 20 и 10. 881. 2500 р., 1750 р. 882. 1582 г.
883. (9; 2), (17; 6).

Раздел VII

898. а) 6^3 ; б) 3^{-10} ; в) $5\frac{1}{3}$; г) $\frac{45}{2048}$. 903. а) -3 ; б) 2 ;

в) $2\frac{6}{13}$; г) $1,3$; д) -3 ; е) -4 . 906. а) $8,9 \text{ г/см}^3$; б) $5,8 \text{ г/см}^3$.

907. а) $\frac{(b-6a)(b+3a)}{(b-a)(b-2a)}$; б) u ; в) $\frac{1}{pq}$; г) 1 . 908. а) $-\frac{b+a}{a^2+b^2}$;

б) $\frac{1}{c+1}$; в) $\frac{mn}{3}$; г) $\frac{p-q}{8q^2}$. 909. а) 0 ; б) $\frac{1}{(q-r)(p-r)}$; в) $\frac{1}{uvw}$;

г) 0 ; д) $\frac{y}{3x+y}$; е) $\frac{5k}{m-k}$. 913. 25° , 70° , 85° ; 25° , 155° , 95° , 85° .

914. 429 км^2 , 135 км^2 , 107 км^2 , 74 км^2 . 915. 102 км^2 , 164 км^2 , 488 км^2 . 916. $1,52 \text{ км}^2$; $8,2 \text{ км}^2$; $0,74 \text{ км}^2$. 917. $70\,000 \text{ р./м}$, $50\,000 \text{ р./м}$. 918. 4 ч , 3 ч . 919. 70 дет./ч , 65 дет./ч . 920. $6823 + 6823 = 13\,646$. 944. а) $2,3$; б) 0 ; в) нет корней; г) f — любое число. 945. а) 5 ; б) 3 ; в) 3 ; г) $5,75$. 948. а) -2 ;

б) -9 ; в) $-1,55$; г) 1 ; д) $-\frac{1}{3}$; е) 1 ; ж) $-0,25$; з) $-\frac{1}{3}$.

952. а) $\frac{b^5 - a^3}{b^5 + a^3}$; б) $\frac{d^m - c^m}{d^m c^m}$; в) $\frac{x^l y^l (y^k + x^k)}{x^k y^k (y^l - x^l)}$; г) $\frac{u^{2t} + u^t v^t + v^{2t}}{u^{2t} v^{2t}}$.

953. а) $\frac{1}{b^2 - a^2}$; б) 1 . 954. 36° , 72° , 72° . 955. 90° , 45° , 45°

или 36° , 72° , 72° . 956. а) 54 ; 126 ; б) 96 ; 324 . 957. 6 кг . 958. $1850 \text{ м}^3/\text{с}$, $300 \text{ м}^3/\text{с}$, $11\,100 \text{ м}^3/\text{с}$. 960. 16 км/ч , 15 км/ч . 961. $26,75 \text{ млн м}^3$, $12,65 \text{ млн м}^3$, $41,8 \text{ млн м}^3$. 963. $3,7 \text{ м}^3/\text{с}$, $4,6 \text{ м}^3/\text{с}$, $5,6 \text{ м}^3/\text{с}$. 965. 89 км , 124 км , 295 км , 116 км . 966. 882 км^2 , 435 км^2 , 183 км^2 . 967. 484 км , 659 км , 178 км . 968. $7,5 \text{ тыс.}$, $6,9 \text{ тыс.}$, $9,2 \text{ тыс.}$, $7,8 \text{ тыс.}$, $11,7 \text{ тыс.}$. 969. $1189,5 \text{ км}^2$, 1237 км^2 . 970. 836 км^2 , 779 км^2 , 285 км^2 . 971. 21 и 7 . 972. 55 г , 15 г . 973. 30 и 90 . 974. 65 тыс. р. , 80 тыс. р. 975. 30 и 20 .

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел I

Начальные понятия геометрии

1. Геометрические фигуры	6
2. Углы между прямыми	23

Раздел II

Линейные уравнения и функции

3. Выражения и формулы	41
4. Тождественные преобразования выражения	58
5. Линейное уравнение с одной переменной	70
6. Решение задач с помощью уравнений	82
7. Линейная функция	92

Раздел III

Треугольники

8. Равные фигуры	111
9. Равные треугольники	121
10. Равнобедренный треугольник	131
11. Свойства и признаки	141
12. Соотношения между элементами треугольника	154
13. Прямоугольный треугольник	166

Раздел IV

Многочлены

14. Одночлены	177
15. Многочлен	188
16. Умножение многочленов	200
17. Вынесение общего множителя за скобки	213
18. Формулы сокращенного умножения	222
19. Разложение многочлена на множители	233

Раздел V

Параллельные прямые

20. Признаки параллельных прямых	255
21. Свойства параллельных прямых	267
22. Расстояния	279

Раздел VI
Рациональные выражения

23. Рациональные дроби	286
24. Действия над рациональными дробями	300
25. Рациональные выражения	313

Раздел VII
Геометрические построения

26. Построения линейкой и циркулем	324
27. Основные задачи на построение	338
Ответы	354

(Название и номер учреждения образования)

Учебный год	Имя и фамилия учащегося	Состояние учебного пособия при получении	Оценка учащегося за пользование учебным пособием
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			

Учебное издание

Латотин Леонид Александрович
Чеботаревский Борис Дмитриевич

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие для 7 класса
учреждений общего среднего образования
с русским языком обучения

4-е издание, исправленное и дополненное

Зав. редакции *В. Г. Бехтина*. Редактор *Л. В. Гринкевич*. Художественный редактор *Л. В. Павленко*. Технический редактор *И. И. Дроздова*. Компьютерная верстка *И. И. Дроздовой, Л. И. Шевко*. Корректоры *О. С. Козицкая, Е. П. Тхир, Е. И. Даниленко, В. С. Бабеня, А. В. Алешко*.

Подписано в печать 31.01.2014. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага офсетная. Гарнитура школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 23+0,25 форз. Уч.-изд. л. 14+0,22 форз. Тираж 3588 экз. Заказ .

Издательское республиканское унитарное предприятие «Народная асвета»
Министерства информации Республики Беларусь.

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/2 от 08.07.2013.

Пр. Победителей, 11, 220004, Минск.

ОАО «Полиграфкомбинат им. Я. Коласа».

ЛП № 02330/0150496 от 11.03.2009.

Ул. Корженевского, 20, 220024, Минск.